حل التمرين (22)

1) نريد ترتيب الأعداد $\left(1-4\times10^{-15}\right)$ و $\left(1-4\times10^{-15}\right)^2$ و $\frac{1}{1+4\times10^{-15}}$ تصاعديا

هل يكون ذلك ممكنا بالحاسبة ؟

غير ممكن ذلك لأنه تسمح الشاشة المألوفة للحاسبة بإعطاء القيمة المضبوطة لعدد له عشرة أرقام على الأكثر.

2) نضع $a=4\times10^{-15}$ ما هو المطلوب عندئذ ؟

• **المطلوب هو التعبير عن الأعداد المعطاة بدلالة a :**

ليكن: $x=1-4\times10^{-15}$ ومنه: $x=1-a$ و $y=\left(1-4\times10^{-15}\right)^2$

ومنه: $y=(1-a)^2$ و $z=\frac{1}{1+4\times10^{-15}}$ ومنه: $z=\frac{1}{1+a}$ ثم مقارنتها:

لدينا: $y-x=(1-a)^2-(1-a)$ ومنه: $y-x=1-2a+a^2-1+a$

وعليه: $y-x=a^2-a$ ومنه: $y-x=a(a-1)$

ولدينا: $1>a>0$ ومنه: $a(a-1)<0$ وعليه: $y-x<0$

ومنه: $y<x$.

ولدينا: $x-z=(1-a)-\frac{1}{(1+a)}$ ومنه: $(x-z)=\frac{1-a^2-1}{1+a}$

وعليه: $x-z=\frac{-a^2}{1+a}$ ومنه: $x-z<0$ وعليه: $x<z$.

وعليه لدينا الترتيب التصاعدي التالي: $y<x<z$

أي: $\left(1-4\times10^{-15}\right)^2<1-4\times10^{-15}<\frac{1}{1+4\times10^{-15}}$.

حل التمرين (23)

• **أكمل:**

1) $$\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$$

$$\sqrt{25}=5$$

وعليه: $\sqrt{9}+\sqrt{16}>\sqrt{25}$

2) نعتبر العددين $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $B=\sqrt{a+b}$

* حساب A^2 و B^2 ثم مقارنة بين A و B:

$$A^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$$
$$B^2=\left(\sqrt{a+b}\right)^2=(a+b)=a+b$$

بما أن: $A^2=B^2+2\sqrt{ab}$ فإن: $A>B$.

حل التمرين (24)

* الترتيب التصاعدي للأعداد $a;a^2,a^3$ في الحالتين التاليتين:

1) في حالة $a=\sqrt{2}-1$:

لدينا: $a=\sqrt{2}-1\approx 0,41$ أي: $0<a<1$ وعليه: $\left(\sqrt{2}-1\right)^3>\left(\sqrt{2}-1\right)^2>\sqrt{2}-1$

2) في حالة $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$:

لدينا: $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}>1$ وعليه: $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}>\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2>\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^3$

حل التمرين (25)

$x\in\left]0;1\right[$ أقارن بين العددين $(1-x)$ و $(1-x)^3$:

نلاحظ أن قيمة x موجبة لأنها محصورة بين 0 و 1 وعليه:

لدينا: $0\leq 1-x\leq 1$ ومنه: $(1-x)^3-(1-x)=(1-x)(x^2-2x)$

وعليه: $x^2-2x\leq 0$ ومنه: $(1-x)^3-(1-x)\leq 0$

وعليه: $(1-x)^3\leq(1-x)$.

حل التمرين (26)

1) x عدد حقيقي حيث $x\geq 2$. نعتبر العبارتين $A=(x-1)^2$ و $B=(x-2)^2$.

* تحليل الفرق: $A-B$:

$$A-B=(x-1)^2-(x-2)^2$$
$$A-B=[(x-1)+(x-2)][(x-1)-(x-2)]$$
$$A-B=[x-1+x-2][x-1-x+2]$$
$$A-B=(2x-3)(+1)=(2x-3)$$

2) استنتاج إشارة $A-B$ ثم مقارنة A و B:

لدينا: $A-B=(2x-3)$

وبما أن: $x\geq 2$ فإن: $2x\geq 4$ أي: $2x-3\geq 1$ وعليه: $A-B>0$

وبالتالي إشارة $A-B$ موجبة تماما ومنه: $A>B$.

حل التمرين (27)

* بفرض أن $x<0$ و $y<0$.
* إكمال الجدول:

	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$		×	
$-x+y<0$			×
$x+y<0$	×		
$-x-y>0$	×		
$x-y<0$			×

حل التمرين (28)

* بفرض $a<b$:

1) إثبات أن $2a+1<2b+1$:

نضرب الطرفين في نفس العدد 2: $a<b$ ومنه: $2a<2b$

نضيف نفس العدد 1 إلى الطرفين فنجد: $2a+1<2b+1$

2) إثبات أن $3-a>3-b$:

لدينا: $a<b$

نضرب الطرفين في العدد (-1) فنحصل: $-a>-b$

ثم نضيف العدد 3 إلى كلا من الطرفين فنجد: $3-a>3-b$

حل التمرين (29)

1) برهان أن $x\geq 3$ معناه $2x+1\geq 7$:

لدينا: $x\geq 3$ نضرب الطرفين في العدد 2 نحصل على: $2x\geq 6$

نضيف 1 إلى الطرفين فنتحصل على: $2x+1\geq 7$

2) برهان أن $x \geq 5$ معناه $-x+4 \leq -1$.

لدينا: $x \geq 5$ نضرب الطرفين في العدد (-1) نحصل على:

$-x \leq -5$ نضيف 4 إلى كلا من الطرفين فتحصل على:

$-x+4 \leq -5+4$ وعليه: $-x+4 \leq -1$.

حل التمرين (30)

$a>0$ ، $b>0$ ، $c>0$

1) إثبات أنه إذا كان $a<b$ فإن: $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$:

لدينا: $a<b$ ويما أن: $c>0$ فإنه بضرب الطرفين $\left(\times\frac{1}{c}\right)$ نحصل على:

$a\times\frac{1}{c}<b\times\frac{1}{c}$ وهذا يعني أن: $(c>0)$، $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

2) إثبات أنه إذا كان $a<b$ فإن: $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

لدينا: $a<b$ وعليه: $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (نفس البسط) بضرب الطرفين في العدد C نحصل على:

$c\times\frac{1}{a}>c\times\frac{1}{b}$ أي: $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

حل التمرين (31)

* نبرهن أن $AC+BD<P$:

$P=AB+BC+CD+DA$

- في المثلث ACB لدينا: $AC<AB+BC$.
- في المثلث ACD لدينا: $AC<AD+DC$.
- في المثلث ADB لدينا: $DB<AD+AB$.
- في المثلث CDB لدينا: $BD<BC+CD$.

$2AC+2BD<AB+BC+AD+DC+AD+AB+BC+CD$

$2AC+2BD<2AB+2BC+2AD+2DC$

$AC+BD<AB+BC+CD+AD$

وعليه: $AC+BD<P$

حل التمرين (32)

• **تعيين الخطأ في الاستدلال التالي:**

$3 > \pi$ وعليه: $3\pi > 9$ ومنه: $3\pi - \pi^2 > 9 - \pi^2$

إذن: $(3-\pi)\pi > (3-\pi)(3+\pi)$ وهكذا: $\pi > (3+\pi)$ وبالتالي: $0 > 3$

الخطأ يكمن في الخطوة: $(3-\pi)\pi > (3-\pi)(3+\pi)$.

بما أن: $(3-\pi) < 0$ فعندما نقوم بالاختزال نضرب المتراجحة بمقلوب $(3-\pi)$ ثم نعكس اتجاه المتراجحة وتصبح: $\pi < 3+\pi$ وليس $\pi > 3+\pi$.

• المجالات

حل التمرين (33)

• **تعيين المجالات الموافقة للأعداد الحقيقية:**

1) الأكبر من أو المساوية -2: $[-2;+\infty[$.

2) المحصورة تماما بين 4 و7: $]4;7[$.

3) الأصغر تماما من 1: $]-\infty;1[$.

4) السالبة تماما أو الأكبر من أو المساوية 3: $]-\infty;0[\cup [3;+\infty[$.

حل التمرين (34)

$$\sqrt{2} \in [-2;2]$$

$$(\pi;\sqrt{2}) \in [1;5[$$

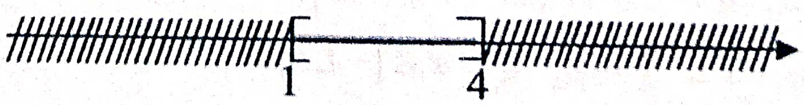
$$\left(-\frac{11}{3};-2,2;\sqrt{2};\pi;5\right) \in [-4;+\infty[$$

$$\left(-\frac{11}{3};\sqrt{2},5;\pi;-2;2\right) \in [-\infty;+\infty[$$

حل التمرين (35)

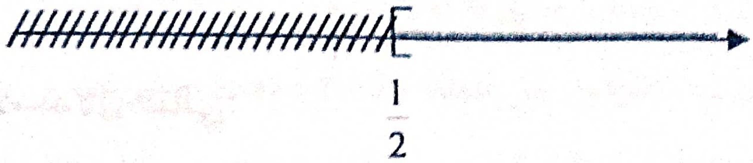
• **تمثيل على المستقيم العددي المجالات التالية:**

1) $[1;4]$:

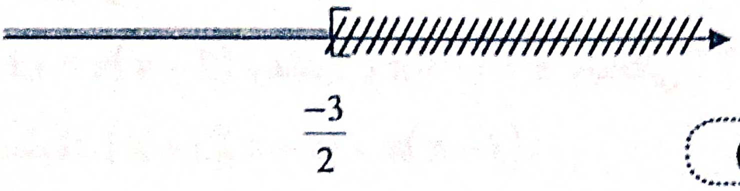


2) $]-2;-1[$:

3) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$:



4) $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right[$:



حل التمرين (36)

* تعيين كل الأعداد الطبيعية ثم الأعداد الصحيحة النسبية التي تنتمي إلى المجال $\left[-2;\frac{9}{2}\right]$:

* الأعداد الطبيعية: $\{0;1;2;3;4\}$

* الأعداد الصحيحة النسبية: $\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$