خلاصة

نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- القول أن دالة f لها نهاية l عند $+\infty$ معناه أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ، أي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ، والمستقيم ذو المعادلة l هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل لهذه الدالة عند $+\infty$.
  - نفس الشيء بالنسبة إلى $-\infty$.
- القول أن دالة f لها نهاية غير منتهية $\pm\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$ معناه أن كل مجال من الشكل $]\alpha;\pm\infty[\ (\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ، أي $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
- إذا كانت نهاية دالة f بالشكل $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]$ معدومة فإن المستقيم $(\Delta);y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$.
- إذا كانت دالة f معرفة بالشكل $f(x)=(ax+b)+\varphi(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $\pm\infty$.

نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي : f دالة معرفة على $]a;x_0[\cup]x_0;b[$:

- عند القول أن هذه الدالة لها نهاية l عند x_0 معناه أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ، أي $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.
- القول أن دالة f لها نهاية غير منتهية عند x_0 معناه أن كل مجال من الشكل $]\alpha;\pm\infty[\ (\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من x_0 ، أي $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .
- إذا كان المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ مقارب لمنحنى دالة فإن نهاية الدالة عند x_0 هي $\pm\infty$.
- نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ لما x يؤول إلى x_0 يعني أن $-f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى x_0.
- إذا كانت دالة f لا تقبل نهاية غير منتهية عند x_0 وكانت مقتصرة على مجال من الشكل $]x_0;y_0[$ من مجال تعريفها $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ فإنها لها نهاية غير منتهية عند x_0 أي $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=\pm\infty$.
  ونقول حينئذ أنها لها نهاية غير منتهية من اليمين عند x_0 .
  - نفس الشيء بالنسبة إلى النهاية غير المنتهية من اليسار عند x_0 نكتب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=\pm\infty$.

ملاحظة : الرمز $\pm\infty$ يعني : $+\infty$ أو $-\infty$ ، ويرمز له كذلك بـ : $+\infty(-\infty)$.

تتمات على النهايات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{x}=-\infty$

f و g دالتان ، a عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، l و l' عددان حقيقيان:

- **نهاية مجموع دالتين :**

إذا كانت نهاية f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن نهاية $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

- **نهاية جداء دالتين :**

إذا كانت نهاية f	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
فإن نهاية $f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة :**

- حالة نهاية الدالة g غير معدومة :

إذا كانت نهاية f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
إذا كانت نهاية g	l'	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالة نهاية الدالة g معدومة :

إذا كانت نهاية f	$l'>0$ أو $+\infty$	$l'>0$ أو $+\infty$	$l'<0$ أو $-\infty$	$l'<0$ أو $-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالات عدم التعيين هي : $(-\infty)\times(+\infty)$ ، $(0)\times(\pm\infty)$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.
- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة :

- إذا كانت $\lim_{x\to a} u(x)=b$ وكانت $\lim_{x\to b} v(x)=c$ فإن: $\lim_{x\to a} f(x)=c$ ، حيث a ، b وَ c أو $+\infty$ أو $-\infty$ و u ، v وَ f دوال حيث .

f ، g وَ h دوال و l عدد حقيقي :

- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=l$ وَ $\lim_{x\to+\infty} h(x)=l$ وكانت، $g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.
- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ وكانت $f(x)\ge g(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ وكانت $f(x)\le g(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- نفس الشيء بالنسبة إلى $-\infty$.

الإستمرارية :

- f دالة مجموعة تعريفها D_f ، و a عدد حقيقي حيث $a\in D_f$

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي : $f(a)$

- f مستمرة عند a معناه أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- القول أن الدالة f مستمرة على مجال I معناه أنها مستمرة عند كل عدد حقيقي من هذا المجال .
- تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع اليد
- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
- مجموع و جداء ومركب دوال مستمرة هي دوال مستمرة .
- دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى .
- إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند a فإن f مستمرة عند a ، حيث D_f .
- إذا كانت دالة مستمرة عند عدد a فلا نستطيع القول أنها قابلة للاشتقاق عند a .

مبرهنة القيم المتوسطة :

- f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ ، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a وَ b بحيث $f(c) = k$.
- لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:
  - نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.
  - نتحقق من استمرارية الدالة على المجال $[a;b]$.
  - نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$.

الدوال المستمرة والرتيبة تمامًا :

- إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تمامًا على مجال $I = [a;b]$ فإن :

1. صورة I بالدالة f هي المجال $[f(a);f(b)]$ في حالة f متزايدة تمامًا ، و في حالة f متناقصة تمامًا فصورته هي $[f(b);f(a)]$.
2. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x) = k$ حلاً وحيدًا في $[a;b]$.

نقول حينئذ أن $f(x)$ تقابل من $[a;b]$ في $[f(a);f(b)]$ أو في $[f(b);f(a)]$.

- إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تمامًا على مجال $I = [a;b]$ وكانت $f(a)f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيدًا في I .
- إذا كانت دالة f ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونًا .
- وحدانية الحل (وجود حل وحيد) مضمونة بالرتابة التامة (متزايدة أو متناقصة تمامًا) ، فإذا كانت الرتابة غير تامة نتحصل على حلول عديدة .