أعمال موجهة

النهايات و الإستمرارية

◻ إزالة حالة عدم التعيين :

1. بالاختزال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$:

- حساب $\left(\lim\limits_{x\to-2} x^3+2x^2+x+2\right)$ وَ $\left(\lim\limits_{x\to-2} x^2+x-2\right)$:

لدينا : $D_f=]-\infty;2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-2}\left[x^3+2x^2+x+2\right]=-8+8-2+2=0$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\left[x^2+x-2\right]=4-2-2=0$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ، لا يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 انطلاقا من النهايتين السابقتين ، فهي عبارة عن حالة عدم التعيين . ح ع ت .

- تحليل كل من x^3+2x^2+x+2 وَ x^2+x-2 :

لدينا $x^3+2x^2+x+2=(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$ ، حيث a وَ b وَ c أعداد حقيقية

ومنه $x^3+2x^2+x+2=ax^3+bx^2cx+2ax^2+2bx+2c$

$=ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}a=1\\b=2-2a=0\\c=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1\\2a+b=2\\2b+c=1\\2c=2\end{cases}$

إذن: $x^3+2x^2+x+2=(x+2)\left(x^2+1\right)$.

وَ $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

- إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$:

لدينا $f(x)=\dfrac{(x+2)\left(x^2+1\right)}{(x+2)(x-1)}$ ومنه $f(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)}{(x-1)}$.

- استنتاج نهاية الدالة f عند -2 :

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\left[\dfrac{x^2+1}{x-1}\right]=-\dfrac{5}{3}$.

حل التطبيق :

- دراسة النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$:

لدينا : $D_g=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}\right]=\dfrac{0}{0}$ ح ع ت

ومنه $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

إذن : $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\right]=\dfrac{3}{0}=+\infty$

ملاحظة : $\lim\limits_{x\to1} g(x)=+\infty$ إذا كان x يؤول إلى 1 بقيم أكبر ، أمّا إذا كان العكس فـ $\lim\limits_{x\to1} g(x)=-\infty$.

2. باستعمال التحليل :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$:

- تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right]=+\infty-\infty$$

إذن لا يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ، لأنها عبارة عن حالة عدم التعيين .

- إثبات أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$:

لدينا : $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}$

$$=x\left(2+\frac{1}{x}\right)-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

إذن: $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$.

- استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\right]=+\infty \; .$$

حل التطبيق :

- دراسة النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\sqrt{x}\right]=+\infty-\infty$ ح ع ت

نزيل حالة عدم التعيين :

لدينا: $g(x)=x+2-\sqrt{x}=x+2-\sqrt{x^2\dfrac{1}{x}}=x+2-\sqrt{x^2}\sqrt{\dfrac{1}{x}}=x+2-x\sqrt{\dfrac{1}{x}}=x\left(1+\dfrac{2}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\dfrac{2}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)\right]=+\infty$

3. باستعمال المرافق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$:

- التحقق من وجود حالة عدم التعيين لمّا x يؤول إلى $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right]=+\infty-\infty$$

أي أن النهاية عبارة عن حالة عدم التعيين .

- إثبات أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$:

لدينا : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}\right)$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x^2+1-\left(x^2-2x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=\frac{2x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

- استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right]=\frac{2}{2}=1 .$$

حل التطبيق :

- دراسة النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$:

ح ع ت $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+2+\sqrt{x^2+x}\right]=-\infty+\infty$.

نزيل حالة عدم التعيين :

لدينا: $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}=\left(x+2+\sqrt{x^2+x}\right)\left(\dfrac{x+2-\sqrt{x^2+x}}{x+2-\sqrt{x^2+x}}\right)$

$$=\frac{(x+2)^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+2-\sqrt{x^2+x}}=\frac{x^2+4x+4-x^2-x}{x+2-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3x+4}{x+2-\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x+2-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x+2-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x+2+\sqrt{x^2+x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x+2-(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right] = \frac{3}{2}$$

إذن: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{3}{2}$.

4. باستعمال العدد المشتق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

- ح ع ت $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[\frac{\cos x - 1}{x}\right] = \frac{1-1}{0}$

إذن لا يمكن تعيين نهاية الدالة f مباشرة ، لأنها عبارة عن حالة عدم التعيين .

- تعيين نهاية الدالة f عند 0 باستعمال العدد المشتق للدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0 :

نضع $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$

ومنه $g(x) = \cos x$ و $g(0) = 1$ و $g'(x) = -\sin x$ و $g'(0) = 0$

ولدينا $\lim_{x\to0} f(x) = g'(0)$ أي $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

إذن: $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

حل التطبيق :

- دراسة النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

ح ع ت $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right] = \frac{0}{0}$.

نزيل حالة عدم التعيين :

نضع $h(x) = \sqrt{x+4}$ ومنه $h(0) = 2$ و $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$

ولدينا $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ و $h'(0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

إذن: $\lim_{x\to0} g(x) = \frac{1}{4}$ ، لأن $\lim_{x\to0} g(x) = h(0)$.