ما يجب أن يعرف

الدالة الأسية ذات الأساس a

1. قوى عدد حقيقي موجب تماما:

تعريف1: نضع $a^b = e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^b: a أس b، أو a قوى b.

تعريف2: a عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$، الدالة الأسية ذات الأساس a.

قواعد الحساب:

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a، b و من أجل كل عددين حقيقيين x، y لدينا:

$\ln(a^x)=x\ln a$ (1)، $a^x a^y = a^{x+y}$ (2)، $a^{-y}=\frac{1}{a^y}$ (3)، $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ (4).

$(a^x)^y=a^{xy}$ (5). $(ab)^x=a^x b^x$ (6). $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$ (7).

دراسة الدالة الأسية ذات الأساس a

تمهيد: نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$،

$f_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

1. اتجاه التغير: الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

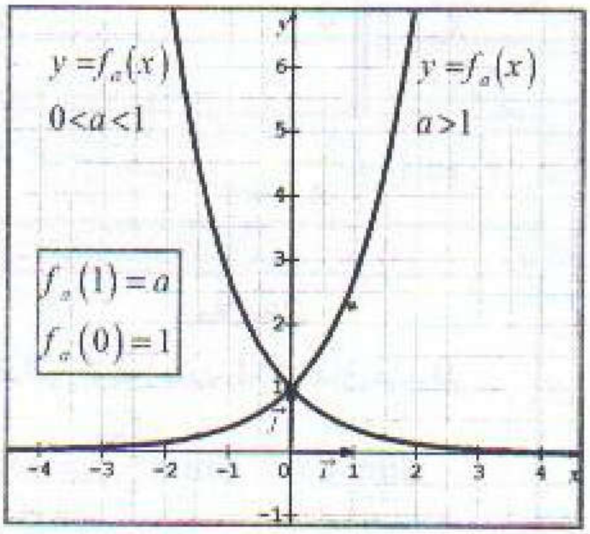
$f_a'(x)=\ln a\times e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0<a<1$ فإن $f_a'(x)<0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
* إذا كان $a>1$ فإن $f_a'(x)>0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. النهايات: نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)=+\infty$
* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=+\infty$

3. جدول التغيرات و التمثيل البياني:



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_a(x)$ $0<a<1$	$+\infty$ ↘ 0

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_a(x)$ $a>1$	0 ↗ $+\infty$

ملاحظة: إذا كان $a=1$ فإن $f_1(x)=1$ و منه الدالة f_1 ثابتة.

نتيجة: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 :

المنحنيان الممثلان للدالتين : $x\mapsto a^x$ ، $x\mapsto\left(\frac{1}{a}\right)^x$ في معلم متعامد متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

الدالة " الجذر النوني "

1. الدالة الجذر النوني :

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$ و تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $x\mapsto\sqrt[n]{x}$، الدالة الجذر النوني.

خاصية: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}}=0$.

2. دراسة الدالة: $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

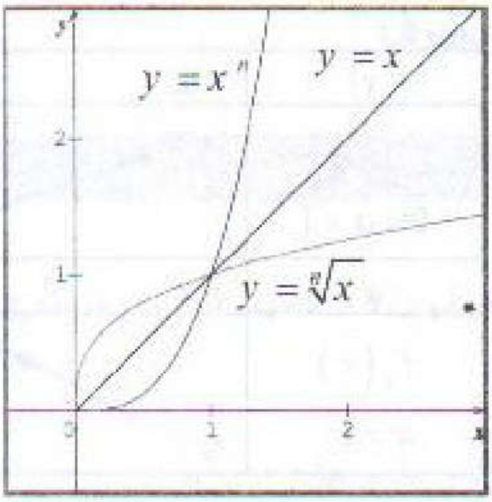
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، و من أجل x من $[0;+\infty[$:

$f_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

f_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $f_n'(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $f_n'(x)>0$ ،

إذن f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$
$f_n(x)$	0	$\nearrow +\infty$



ملاحظة

الدالة f_n غير قابلة للاشتقاق عند 0.

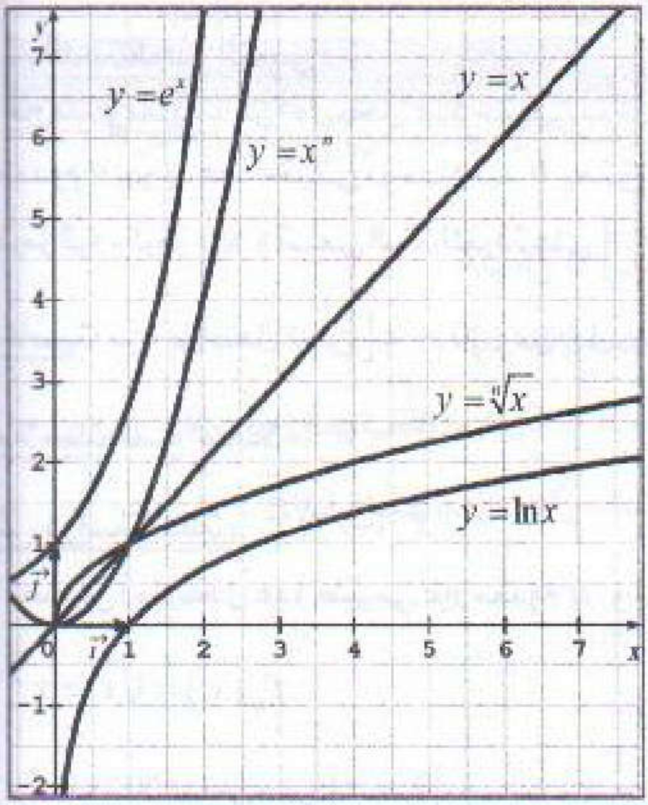
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$$

<u>نتيجة</u>: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، ومن أجل x من $[0;+\infty[$:

المنحنيان الممثلان للدالتين : $x \mapsto x^n$ ، $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ في معلم متعامد متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته: $y = x$.

التزايد المقارن

<u>**التزايد المقارن في جوار**</u> $+\infty$: من اجل كل عدد حقيقي $x > 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا:



العمود (1)	العمود (2)
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x^n} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$

<u>**ملاحظة هامة**</u>: الشكل أعلاه يسهل قراءة النهايات السابقة كمايلي :

العمود (1) : القراءة في اتجاه عقارب الساعة.

العمود (2) : القراءة في عكس اتجاه عقارب الساعة.