تعريف:

f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

f مستمرة عند a يعني أن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة: القول أن f مستمرة على مجال $J \subset I$ يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من J.

التفسير البياني : تكون الدالة f مستمرة على مجال $J \subset I$ عندما يمكن رسمها على هذا المجال دون رفع القلم .

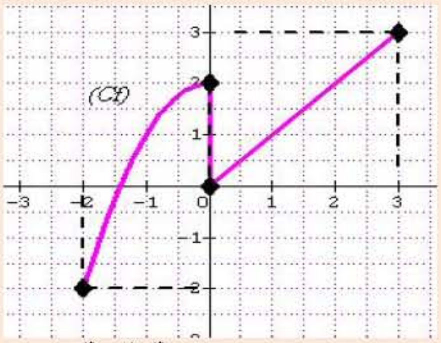
تمرين 01:

لتكن f الدالة المعرفة على $[-2,3]$ ب: $f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & ,x \in [-2,0[\\ x & ,x \in [0,3] \end{cases}$

1-مثل بيانيا الدالة f .هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال : $[-2,3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة.

الحل: -1



** أنظر الشكل .لدينا من جهة $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 2$ و من جهة ثانية $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$

اذن الدالة f لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2- الدالة f غير مستمرة عند 0 وبالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2,3]$.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال : $[0,3]$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على R: ب $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \ \ x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

أدرس الأستمرارية عند القيمة 2

الحل

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند القيمة2 اذا نحقق مايلي أولا f معرفة علي مجال مفتوح يشمل 2

ثانيا $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

الشرط الأول محقق نحسب $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

بمأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

من ضيع حرثه .. ندم يوم حصاده

الأستمرار على اليمين فيa

نقول عن الدالة f انها مستمرة على يمين القيمة a ادا نحقق ماسيلي

- f معرفة عند القيمة a و على الجوار الأيمين ل a
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = f(a)$

الأستمرار على اليسار فيa

نقول عن الدالة f انها مستمرة على يسار القيمةa ادا نحقق مايلي

- f معرفة عند القيمة a و علي الجوار الأيسر ل a
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = f(a)$

نظرية

تكون الدالة fمستمرة عند القيمة a إذا كانت f مستمرة علي يمين القيمة a و f مستمرة علي يسار القيمة a

ملاحظة

ادا كانت الدالة f غير مستمرة علي اليمينa او غير مستمرة علي اليسارa فهي غير مستمرة عند القيمة a

هندسيا

- إذا كانت الدالة مستمرة علي مجال I فان منحناها لا ينقطع عند أي نقطة ذات الفاصلة x من المجال I بطريقة اتخري يمكن رسم منحنى الدالة a دون رفع القلم
- إذا كانت الدالة f مستمرة علي اليمين في a فقط او مستمرة علي اليسا رفي a فقط فان النقطة $A(a, f(a))$ هي نقطة توقف للمنحنى

تمرين تطبيقي03

لتكن الدالة fالمعرفة على R : ب $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 4x - 1, x \le 1 \\ f(x) = 3 + \sqrt{x-1}, x \succ 1 \end{cases}$

أدرس الأستمرارية عند القيمة 1

الحل

تكون الدالة مستمرة عند القيمة إذا وجد مجال مفتوح يشمل وكان 1 $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = f(1) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x)$

لدينا $f(1) = 6$ ومن جهة أخري لدينا

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} (3x^2 + 4x - 1) = 6$ ومنه الدالة f مستمرة على يسار 1

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} (3 + \sqrt{x-1}) = 3$ ومنه الدالة f غيرمستمرة على يمين1

النتيجة بمأن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x)$ فان f غيرمستمرة عند1

تمرين تطبيقي04 **لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي:** $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 \ ; & x \le 2 \\ f(x) = x^2 + x + a \ ; & x > 2 \end{cases}$

1) عين العدد a حت تكون f مستمرة عند 2 .

تكون الدالة مستمرة عند القيمة 2 إذا تحقق مايلى $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x)$

الحل و لدينا $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} (x^2 - 2x + 1) = 1$

من جهة أخرى لدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} (x^2 + x + a) = 6 + a$

ومنه حتى تكون الدالة مستمرة عند القيمة 2 إذا وفقط إذا تحقق $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x)$

أي $6 + a = 1$ وبتالى فإن $a = -5$

الأستمرار على مجال

- الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها.

** الدوال كثيرات الحدود ، SIN، COS مستمرة على R.

** الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على مجال تعريفها.

◈ أمثلة: الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على R لإنها دالة كثير الحدود.

الدالة $x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$ لإنها دالة ناطقة.

عمليات على الدوال المستمرة

الدالتين F G مستمرتين علي مجالI وk عدد حقيقي فإن

- الدوال G +F ; G.F ; k.F مستمرة علي المجال I .
- الدالة F/G مستمرة علي المجال I إذا كانت لا تنعدم علي المجال I.
- الدالة F0G تكون مستمرة علي المجال I إذا وفقط إذا كانت G مستمرة علي (I) F.
- الدالة F0G تكون مستمرة عند القيمة a إذا وفقط إذا كانت G مستمرة عند القيمة a والدالة F مستمرة علي G (a).

مثال تطبيقي نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x)=(x^2+x+3)\cos x$ لماذا الدالة f مستمرة على R ؟

بمأن الدالة $x \mapsto x^2+x+3$ مستمرة على R لإنها دالة كثير الحدود و الدالة $x \mapsto \cos x$ مستمرة على R

إذن جداؤهما $x \mapsto (x^2+x+3)\cos x$ هو دالة مستمرة على R ومنه نستنتج أن الدالة f مستمرة علىR .

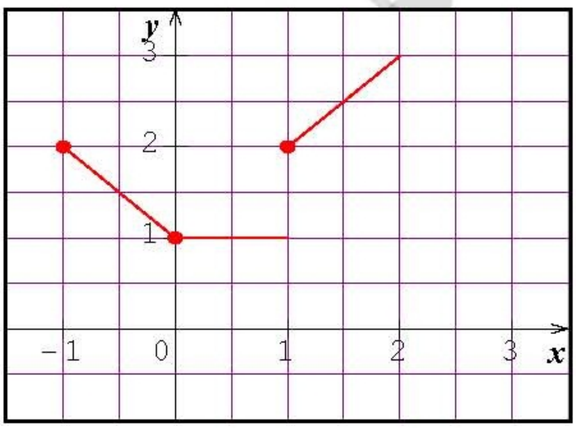
تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على R و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز Eأو [ ].

1) أمثلة $[-2,3]$، $E(-1)=-1$، $E(-11,01)=-12$ $E\left[\sqrt{3}\right]=1$ و $E(11,01)=11$.

تمرين تطبيقي3:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;2[$ بـ: $f(x) = xE(x)+1$ حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح

1. **عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $]-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.**
2. **أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.**
3. **هل الدالة f مستمرة على المجال $]-1;1[$؟ على المجال $]-1;2[$؟**



الحل

1. من أجل $x \in]-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

من أجل $x \in [0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x \in [1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل المقابل.

3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $]-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $]-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

اللسان ليس عظاماً لكنه يكسر العظام

نتعلم لنغير حاضرنا ونبني مستقبلنا
تمارين تطبيقية على الإستمرارية

التمرين ا لأول

نعتبر الدالة f المعرفة على R

أدرس الإستمرارية الدالة عند القيمة x_0 فى الحالات التالية

$$(1):\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases} \qquad x_0=1$$

$$(3):\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \qquad x_0=0$$

$$(2):\begin{cases} f(x)=x+3x-1 & si \quad x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x} & si\, x>1 \end{cases} \qquad x_0=1$$

$$(4):\begin{cases} f(x)=|x|\dfrac{\sqrt{x}}{x} & si \; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \qquad x_0=0$$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على R

عين قيمة العدد حت تكون a الدالة مستمرة على فى الحالات التالية

$$(1):\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1} & si \quad x\neq -1 \\ f(-1)=a \end{cases} \qquad x_0=-1$$

$$(2):\begin{cases} f(x)=x^2+3x+a & si \quad x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x} & si\, x>1 \end{cases} \qquad x_0=1$$

التمرين ثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على R

عين قيمة العدد a حت تكون الدالة مستمرة عند القيمتين -1 و 1 فى الحالة التالية

$$\begin{cases} f(x)=2x+a+1 & si \; x<-1 \\ f(x)=\dfrac{ax-b+a}{x^2+4} & si -1\leq x\leq 1 \\ f(x)=x^2+\sqrt{x+3} & si\, x\geq 1 \end{cases}$$

تمرين الرابع

f دالة معرفة على R كمايلي بـ: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

- أدرس استمرار الدالة f على R

تمرين الخامس

f دالة معرفة على R كمايلي بـ: $f(x)=(x^2+2x)\sin x$

-أدرس استمرار الدالة f على R

التمرين السادس

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي: $f(x)=x(x+E(x))$ حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحني الممثل للدالة f .

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$، $[-2;0[$، $[-2;1[$؟

عامل الناس كما تحب أن تُعامَل