الدوَالُ الأصْليَةُ وحِسَابُ التكامُلاتِ

1 - مفهوم التكامل على مجال

1-1 تكامل دالة درجية

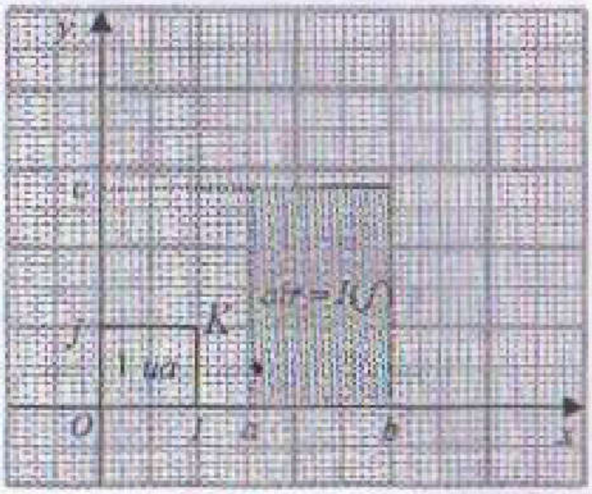
نقول أن f دالة درجية على المجال $[a,b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم لـ $[a,b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0=a$ ، x_1 ، x_2 ، ... ، $x_n=b$ بحيث $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$ و بحيث الدالة f ثابتة على كل مجال من الشكل $]x_{i-1},x_i[$ حيث $1\le i\le n$.

حالة دالة ثابتة على $[a,b]$

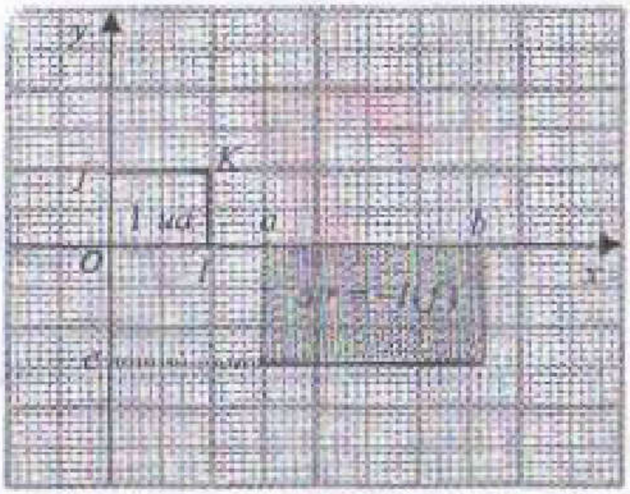
f دالة معرفة على مجال $[a,b]$ بحيث من اجل كل x من $]a,b[$ لدينا $f(x)=c$.

القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن أن تكونا مختلفتين عن العدد c.

بالتعريف تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$ بحيث $I(f)=(b-a)\times c$

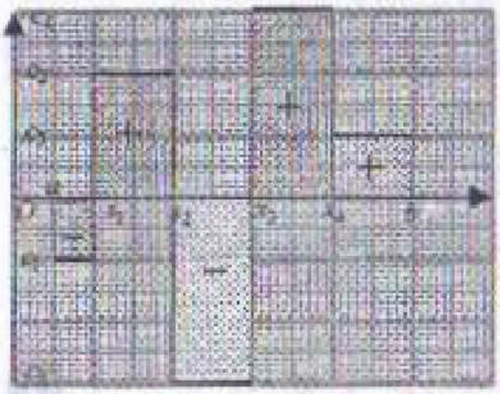


لما $c > 0$ تكامل الدالة f هو مساحة المستطيل الملون.وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$



لما $c < 0$ تكامل الدالة f هو عكس مساحة المستطيل الملون.

حالة دالة درجية على المجال $[a,b]$



إذا كان من اجل كل x من $]x_{i-1}, x_i[$ لدينا $f(x)=c_i$ فإن تكامل f على $[a,b]$ هو العدد $I(f)$ المعرف بـ:

$$I(f)=(x_1-x_0)c_1+(x_2-x_1)c_2+\dots+(x_n-x_{n-1})c_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i$$

التكامل $I(f)$ على المجال $[a,b]$

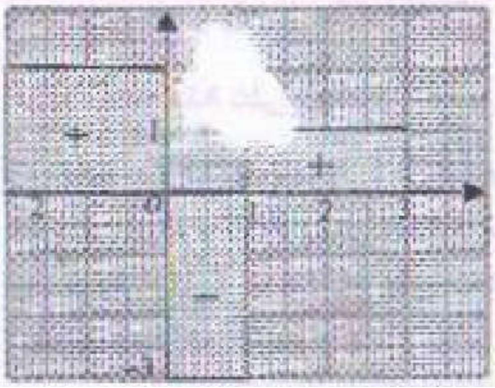
ترمز له بـ $\int_a^b f(t)\,dt$ و الذي يقرا تكامل من a إلى b لـ $f(t)$ تفاضل t .

ملاحظة

بما ان المتغير t ابكم نستطيع استبداله بأي متغير اخر و عليه :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\dots$$

مثال .



g دالة درجية معرفة على المجال $[-2,3]$ بـ:

$$\begin{cases} g(x)=2 & , 0 \geq x \geq -2 \\ g(x)=-3 & , 1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=1 & , 3 \geq x > 1 \end{cases}$$

(γ_g) منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$I(g)=(0+2)\times 2+(1-0)\times(-3)+(3-1)\times 1$

$=+4-3+3=4$

1 - 2 تكامل دالة مستمرة

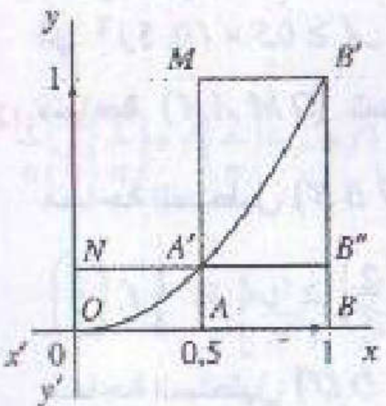
حصر مساحة

مثال -

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ بـ $f(x)=x^2$ و (γ) قوسا من القطع المكافئ (ρ) الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

نريد تعيين حصر لمساحة حيزمن المستوى تحت المنحني الممثل للدالة f المحدد بالقوس (γ)

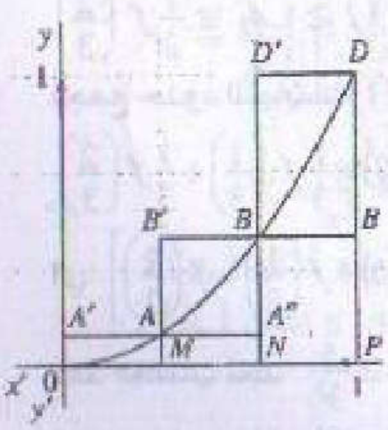
و محور الفواصل (xx') و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن $\mathcal{A}$.



1) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول $0,5$.

على المجال $[0,0,5]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0,5,1]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB''A'$ و $ABB'M$.

اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ على المجال $[0,1]$.



2) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى ثلاثة مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه

فالساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $AA''NM$ و $B'BNM$.

على المجال $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

- أعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ ثم قارنه مع الحصر المحصل عليه في السؤال 1 .

3) نقسم المجال $[0,1]$ إلى n مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ مع k عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$.

أ) أعط حصرا لمساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على I بدلالة n و k.

ب) أعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ مبينا أن $\mathcal{A}$ محصورة بين متتاليتين (U_n) و (V_n)

بحيث $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ أوجد عبارتهما.

(يعطى $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

جـ) احسب $\lim_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\mathcal{A}$ ؟

✓ الحل

1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0,5\times f(0,5)$ ومنه:

$0,5\times f(0,5)\geq \mathcal{A}_0\geq 0 \quad ...(1)$

مساحة $(ABB'M)$ تساوي $0,5\times f(1)$ ومنه:

$0,5\times f(1)\geq A_1\geq 0,5\times f(0,5) \quad ...(2)$

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0,5(f(0,5)+f(1))\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1\geq 0,5\times f(0,5)$

أي $0,5((0,5)^2+1^2)\geq \mathcal{A}\geq 0,5\times(0,5)^2$ بالحساب نجد $0,625\geq \mathcal{A}\geq 0,125$.

2) مساحة $(OMAA')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{1}{3})$ و منه $\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})\geq \mathcal{A}_0\geq 0$ ... (1).

مساحة المستطيل $(MNBB')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{2}{3})$ ومنه:

$\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)\geq \mathcal{A}_1\geq \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) \quad ....(2)$

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(1)$ ومنه:

$\frac{1}{3}f(1)\geq \mathcal{A}_2\geq \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right) \quad ....(3)$

بجمع حدود التباينات (1) و (2) و (3) نجد:

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}f(1)\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2\geq \frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$$

أي $\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right]\geq \mathcal{A}\geq \frac{1}{3}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{3^3}\geq \mathcal{A}\geq \frac{5}{3^3}$ أي $0,51\geq \mathcal{A}\geq 0,18$.

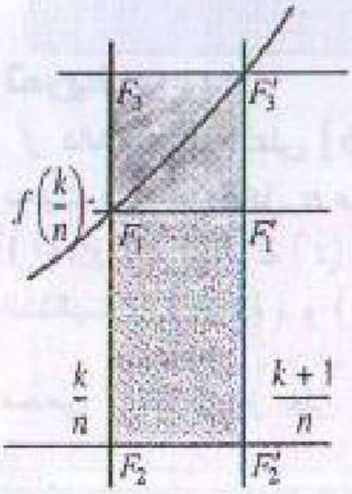
من السؤالين (1) و (2) نلاحظ أن التقسيم الثاني أعطى لنا حصرا أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر للمساحة $\mathcal{A}$ أدق.

3) أ) نرمز بـ $\mathcal{A}_k$ إلى مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على المجال I،
هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1F_1'F_2F_2'$ و $F_2F_2'F_3F_3'$.

مساحة $(F_1F_1'F_2F_2')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$

مساحة $(F_2F_2'F_3F_3')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\geq \mathcal{A}_k\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.



نضع $g_n(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $h_n(t)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

مع k ينتمي إلى $\{0,1,...,n-1\}$ و $t\in\left]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$.

ب) $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\geq \mathcal{A}_0\geq \frac{1}{n}f(0)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\geq \mathcal{A}_1\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\vdots$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\geq \mathcal{A}_{n-1}\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+...+\mathcal{A}_{n-1}\geq\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

و بما أن $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+..+\mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+....+\frac{n^2}{n^2}\right]\geq \mathcal{A}\geq\frac{1}{n}\left[\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+...+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]\geq \mathcal{A}\geq\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$$

بوضع $U_n=\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$ و $V_n=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]$.

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n\geq \mathcal{A}\geq U_n$.

$$U_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \quad \text{و} \quad V_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

U_n هي مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية g_n و لتكن $I(g_n)$

V_n هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية h_n و لتكن $I(h_n)$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

بما أن $U_n \le \mathcal{A} \le V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{3}$:

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

يمكننا التأكد من أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول أن هذه النهاية المشتركة ℓ هي تكامل f على المجال $[0,1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t)\,dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{3}$

تعريف

f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، نتقبل أنه توجد متتاليتين لدالتين درجيتين (g_n) و (h_n) بحيث من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من أجل t من $[a,b]$

$h_n(t) \ge f(t) \ge g_n(t)$ ... (1).

المتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ ... (2)

نسمي ℓ تكامل f على $[a,b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t)\,dt$

ملاحظة

1) إذا كانت (s_n) و (S_n) متتاليتين لدالتين درجيتين لهما نفس خصائص (g_n) و (h_n) فإن ℓ هي كذلك نهاية $I(s_n)$ و $I(S_n)$.

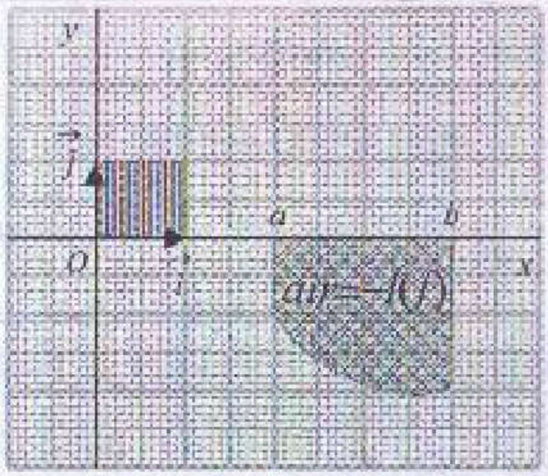
2) تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$.

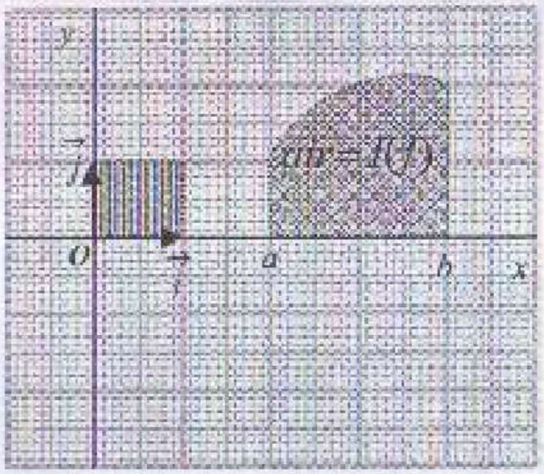
- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى 2^n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة f .
(f رتيبة أو غير رتيبة، موجبة أو سالبة).

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ المحصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t)\,dt$ لكن حتى و لو كانت f رتيبة على $[a,b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.

3) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوى تحت المنحني الممثل للدالة f .

- إذا كانت f مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوى تحت المنحني الممثل للدالة f .

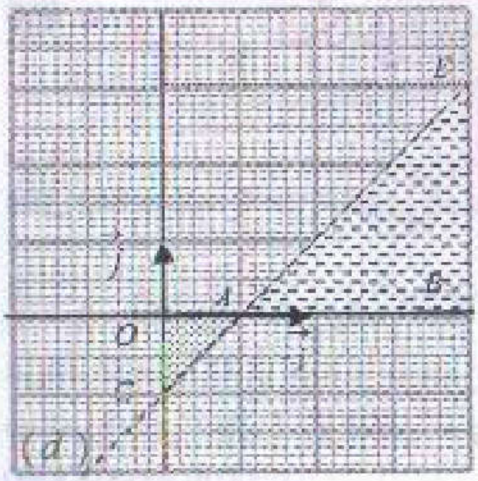




تمرين تدريبي ❶

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=2x-1$.

احسب التكاملين التاليين $J=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)\,dt$ ، $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$



✓ الحل

الدالة f ممثلة بالمستقيم (d) الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ ولتكن $B(2,0)$ من محور الفواصل

لتكن E نقطة من (d) فاصلتها 2 و ترتيبها 3 .

(d) يقطع محور التراتيب في $C(0\,;-1)$

- على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ الدالة f موجبة

ومنه J هو مساحة المثلث ABE والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J=\frac{9}{4}$.

- على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ الدالة f سالبة ومنه I نظير مساحة المثلث OCA التي هي $\frac{1}{4}$

ومنه $I=-\frac{1}{4}$.

تمرين تدريبي ❷

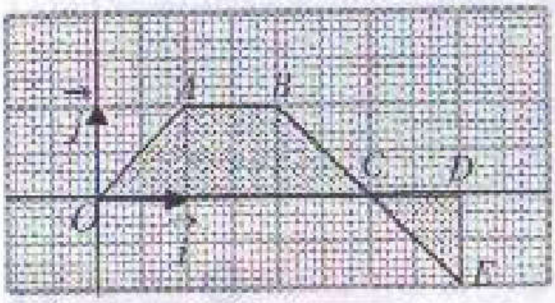
f دالة معرفة على المجال $[0,4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=x & , \quad x\in[0,1] \\ f(x)=1 & , \quad x\in[1,2] \\ f(x)=-x+3 & , \quad x\in[2,4] \end{cases}$$

احسب التكاملين I و J التاليين $I=\int_0^3 f(t)\,dt$ ، $J=\int_3^4 f(t)\,dt$

ثم احسب $I+J$ . .

✓ الحل



- على المجال $[0,3]$ الدالة f موجبة

ومنه I هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

والتي تساوي $\frac{(3+1)\times 1}{2}$ اي 2

ومنه $I=2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3,4]$ الدالة f سالبة

ومنه J هو نظير مساحة المثلث CED التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{-1}{2}$

إذن $I+J=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

2 - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

2 - 1 تمديد تعريف التكامل إلى a و b كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجية او مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $b > a$ و الآن إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، و كان a و b عددين من I بحيث $a \geq b$

نضع التعريف التالي :

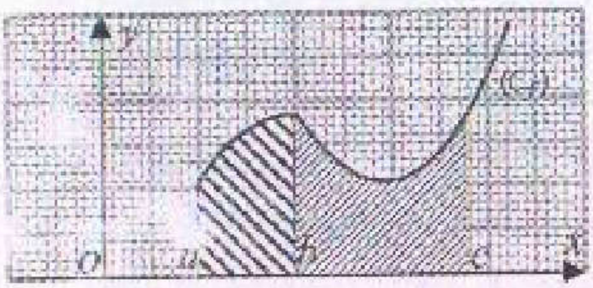
لما $a > b$ تكون $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$ ولما $a=b$ تكون $\int_b^a f(t)\,dt=0$

2 - 2 علاقة شال

مبرهنة

f دالة مستمرة على I . مهما تكن الأعداد الحقيقية a ، b ، c من I

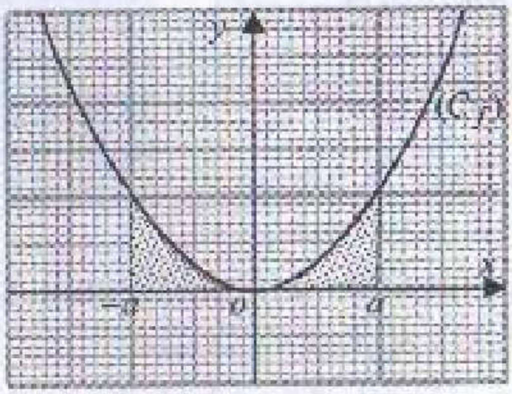
$$\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt$$

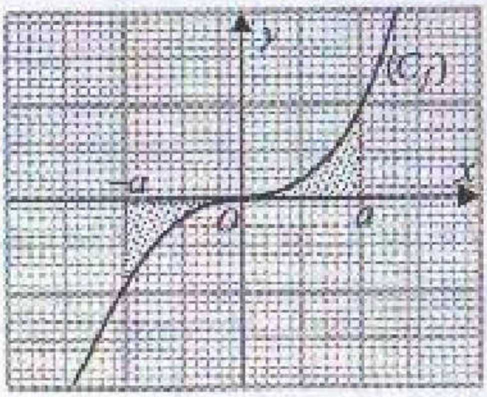


نتيجة

1) اذا كانت f زوجية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

2) إذا كان f فردية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$





الإثبات

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$

1) إذا كانت f زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$ ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

2) إذا كانت f فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

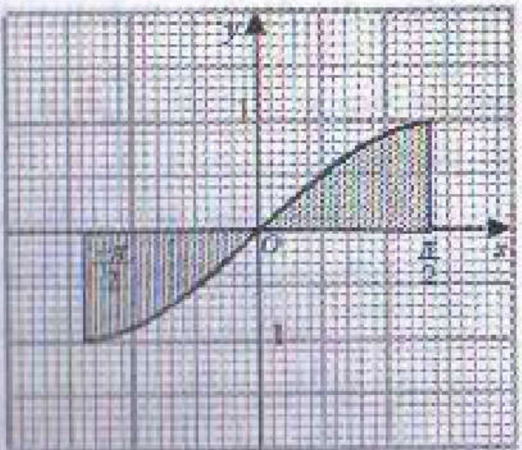
$\int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$

و منه $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

مثال 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$

احسب التكامل $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

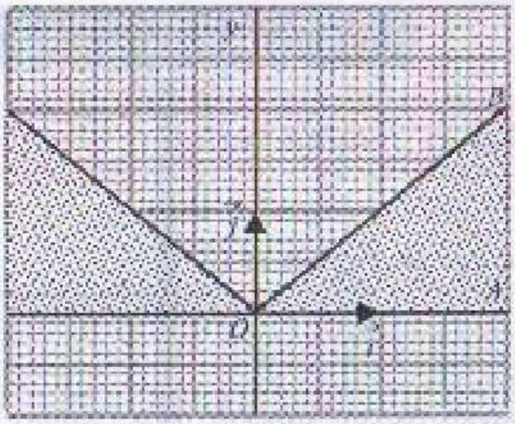


✓ **الحل**

الدالة f فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 0$.

مثال ❷



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$

احسب التكامل $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$

✓ الحل

الدالة f زوجية على المجال $[-2\,,\,2]$

ومنه $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

وبما أن f موجبة على المجال $[0\,,\,2]$

فإن $\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ تساوي مساحة المثلث OAB التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt=2\times 2=4$.

2 - 3 خطية التكامل

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و λ عدد حقيقي كيفي.

مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_a^b (f+g)(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$$

الإثبات

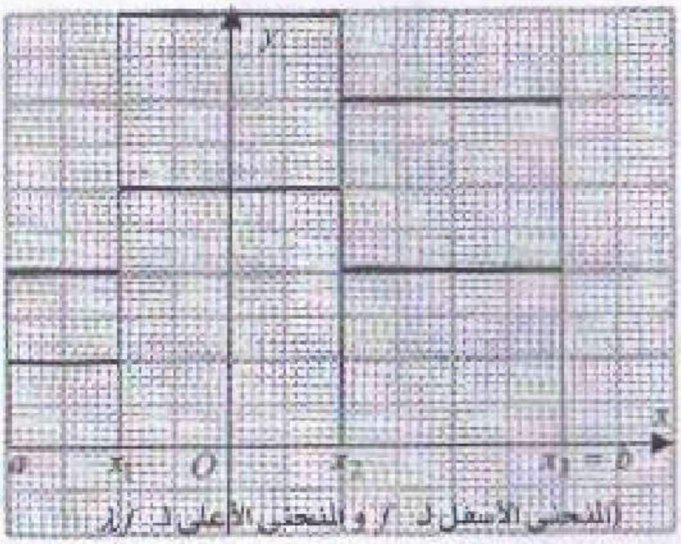
نثبت المساواة $\int_a^b \lambda f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt$ أي $\lambda I(f)=I(\lambda f)$

1) نفرض أن الدالة f درجية على المجال $[a\,,\,b]$ إذن يوجد تقسيم لـ $[a\,,\,b]$ مع $x_0=a$ و $x_n=b$ و بحيث من أجل كل x من $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ ، $f(x)=c_i$ مع $1\le i\le n$

عندئذ من أجل كل x من $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ ، $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda c_i$ و عليه λf ثابتة على كل مجال من هذه المجالات .

إذن فالدالة λf درجية.

$$I(\lambda f)=\lambda c_1(x_1-x_0)+\ldots+\lambda c_n(x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda\left[c_1(x_1-x_0)+\ldots+c_n(x_n-x_{n-1})\right]=\lambda I(f)$$



(المنحنى الأسفل لـ f و المنحنى الأعلى لـ f)

2) نفرض أن f دالة مستمرة على المجال $[a\,,b]$

عندئذ من أجل كل n من IN^* توجد دالتان درجيتان g_n و h_n بحيث من أجل كل t من $[a\,,b]$ يكون $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$

و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

- لما $\lambda \geq 0$ فإنه من أجل كل t من $[a\,,b]$ و كل n من IN^* يكون:

$\lambda h_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda g_n(t)$

لنبين أن المتتاليتين $(I(\lambda g_n))$ و $(I(\lambda h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$. و بما أن g_n و λg_n دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n) = \lambda I(g_n)$ من أجل كل $n \geq 1$

و بالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.

بنفس الكيفية نبين أن $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

- بضرب التباينة $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ بالعدد λ لما $\lambda < 0$ نجد $\lambda g_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

3) لما $a \geq b$ فإنه من التعريف:

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = -\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt$$

و حسب النتيجة السابقة $\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_b^a f(t)\,dt$

إذن $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = -\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt = -\int_b^a \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$

أي $I(\lambda f) = \lambda I(f)$

مثال .

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[2\,,7]$ إذا علمت أن:

$I = \int_2^3 f(x)\,dx = -5$ و $J = \int_7^3 f(x)\,dx = 3$ و $K = \int_2^7 g(x)\,dx = 13$

أ) احسب $L=\int_2^7 f(x)dx$ و $M=\int_2^7 (f+g)(x)dx$ و

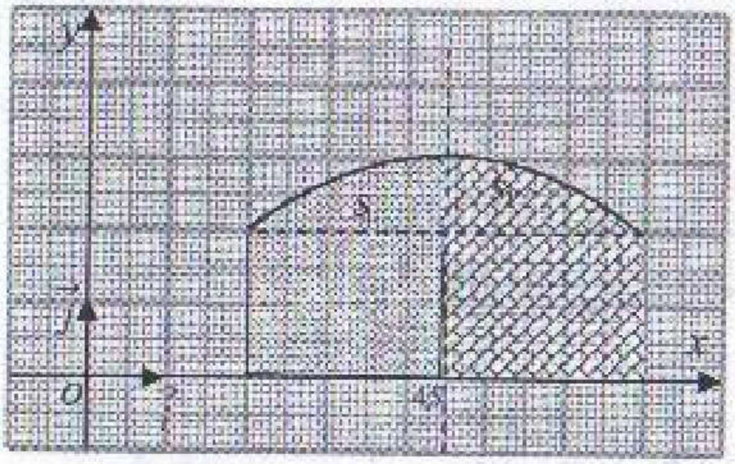
$$N=\int_2^7 \left(4f(x)-5g(x)\right)dx$$

ب) نفرض أن $g(x)>0$ على المجال $[2,7]$ و المنحني البياني لـ g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4,5} g(x)dx$.

✓ الحل

أ) $L=\int_2^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_7^3 f(x)dx=I-J=-8$

$$M=\int_2^7 (f+g)(x)dx=\int_2^7 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx=L+K=-8+13=5$$



$$N=\int_2^7 4f(x)dx-\int_2^7 5g(x)dx$$
$$=4\times L-5K=-32-65=-97$$

ب) $S_1=\int_2^{4,5} g(x)dx$

$$S_2=\int_{4,5}^{7} g(x)dx$$

بما أن المنحني المثل للدالة g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=4,5$

فإن $S_1=S_2$ و $S_1+S_2=13$ و منه $S_1=\frac{13}{2}$

2 - 4 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I ، و ليكن a و b عددين حقيقيين من I.

1) إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge 0$.

2) إذا كان $a\le b$ و $f\ge g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b g(t)dt \ge \int_a^b f(t)dt$.

الإثبات

1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2) من الفرض $f \geq g$ نستنتج أن $f-g \geq 0$ على المجال $[a,b]$
وعليه $I(f-g) \geq 0$ لكن $I(f-g) = I(f) - I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

مثال .

عين إشارة التكامل $I = \int_0^1 (x^2-1)dx$ و $J = \int_1^2 (x^2-1)dx$

الحل

لتعيين إشارة I نعين إشارة الدالة f المعرفة على $[0,2]$ بـ $f(x) = x^2-1$

- إذا كان $x \in [0,1]$ فإن $f(x) \leq 0$ إذن $\int_0^1 -f(x)dx \geq 0$ وحسب الخطية

$\int_0^1 -f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$ وعليه نستنتج $\int_0^1 f(x)dx \leq 0$

- إذا كان $x \in [1,2]$ فإن $f(x) \geq 0$ ومنه $\int_1^2 f(x)dx \geq 0$.

2-5 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة 1

f دالة مستمرة على مجال I، و ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين من I، عندئذ يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f بين a و b

الإثبات

نفرض أن الدالة f متزايدة.

الحالة الأولى $a < b$

. بما أن f متزايدة فإنه من أجل كل x من $[a, b]$ فإن $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

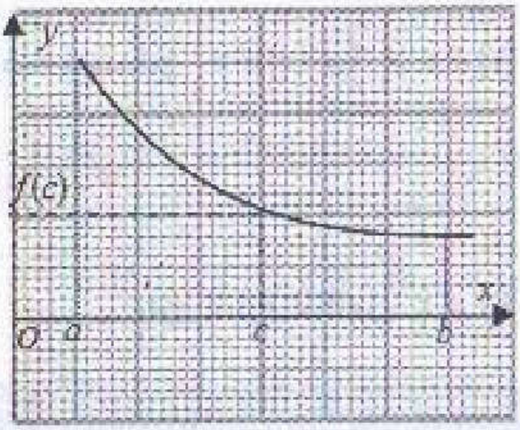
ومنه نستنتج $f(b)(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq f(a)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(b) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f(a)$ ،

. بما أن f متزايدة ومستمرة على $[a, b]$

فإنه يوجد عدد حقيقي c من $[a, b]$

بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.



الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

و بما أن $a > b$ فإنه يوجد c محصور بين a و b بحيث $\int_b^a f(x)dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x)dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$.

مبرهنة 2

f دالة مستمرة على مجال I، و ليكن m و M عددين حقيقين مختلفين، و ليكن أيضا a و b عددين حقيقيين من I بحيث $a \leq b$.

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ على المجال $[a, b]$ فإن $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$

الإثبات

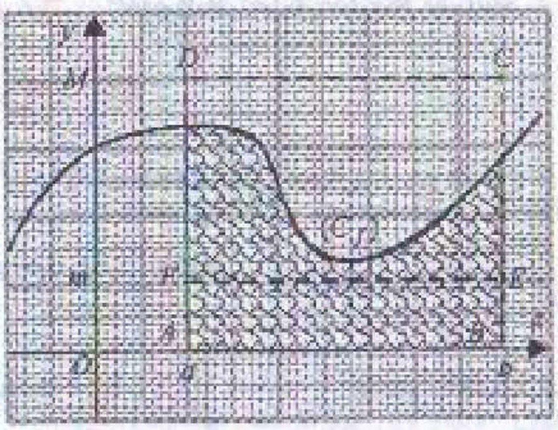
من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا ،

$m \leq f(x) \leq M$ .... (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a, b]$

إذن $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ و $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$

وبما أن $a \leq b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $M \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq m$.

نتيجة

f دالة مستمرة على مجال I و ليكن a و b عددين كيفيين من I
وليكن M عدد حقيقي موجب.
إذا كانت $|f(x)| \leq M$ على $[a, b]$ أو $[b, a]$
فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

مبرهنة

1) f دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$

2) إذا كانت f تنعدم عند c من $[a, b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a, c]$ وموجبة على $[c, b]$
فإن $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$

الإثبات

1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx.$$

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$$

ملاحظة

1) إذا كانت f سالبة على مجال I فإن تكامل f على I هو نظير مساحة حيز من المستوي فوق المنحنى الممثل للدالة f.

2) إذا غيرت f إشارتها على I نجزئ المجال I إلى مجالات جزئية بحيث الدالة f لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

تمرين تدريبي 1

بين أن 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \frac{\pi}{2}$ ، 2) $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx \le 2$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمرتان على $\mathbb{R}$ إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

1) من أجل كل t من $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ يكون $0 \le \cos t \le 1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt$ لكن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \frac{\pi}{2}$

2) بما أن $1 \ge x \ge 0$ فإن $0 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 2x \le 2$ و منه

$$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx \le \int_0^1 2\, dx$$

لكن $\int_0^1 2\, dx = 2\,(1-0) = 2$ إذن $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx \le 2$.

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1$ و (d) تمثيله البياني في معلم متعامد و متجانس

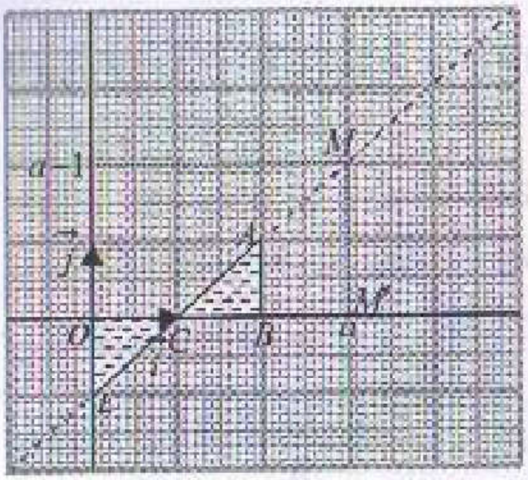
أ) احسب التكامل $I=\int_0^2 f(x)dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ f على $[0\,,2]$.

ب) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a > 2$ و M نقطة من (d) ذات الفاصلة a.

احسب $S(a)=\int_2^a f(x)dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

1) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$



بما أن f سالبة على المجال $[0\,,\,1]$

فإن $\int_0^1 f(x)\,dx$

هو نظير مساحة المثلث OEC التي تساوي $\frac{1}{2}$

ومنه $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

بما أن f موجبة على $[1\,,\,2]$ فإن $\int_1^2 f(x)\,dx$

هي مساحة المثلث ACB و التي تساوي 1

ومنه $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ إذن $I = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0\,,\,2]$ هي M حيث

$$M = \frac{1}{b-a}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ب) بما أن f موجبة على $[2\,,\,a]$ فإن $\int_2^a f(x)\,dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

والتي تساوي $\frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$ أي $\frac{a(a-2)}{2}$

إذن $S(a) = \int_2^a f(x)\,dx = \frac{a(a-2)}{2}$

الدالة S قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$.