المتتاليات العددية

✠ المتتاليات العددية :

♠ نسمي متتالية عددية u كل دالة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو جزء منها نحو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

✠ اتجاه تغيّر متتالية عددية :

لدراسة اتجاه تغير متتالية (U_n) ندرس اشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

♠ اذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .
♠ اذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n < 0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما .
♠ اذا كان الفرق : $U_{n+1} - U_n = 0$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة .

✠ ملاحظة :

♠ لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) معرفة بحدها العام يمكن دراسة اتجاه تغيّر دالتها المرفقة .
♠ لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) اذا كانت حدودها موجبة تماما نقارن $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1

✠ تعريف متتالية حسابية :

♠ نقول أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان
من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + r$ أو $U_{n+1} - U_n = r$

✠ عبارة الحد العام لمتتالية حسابية :

♠ (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_p و أساسها r عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (U_n)
هو: $U_n = U_p + (n-p)r$

✠ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

♠ لتكن (U_n) متتالية حسابية ، لحساب المجموع : $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ... + U_n$
نطبق القانون : $S = (n-p+1)(\dfrac{U_p + U_n}{2})$. حيث n دليل الحد الأخير و p دليل الحد الأول .

✠ الوسط الحسابي :

♠ تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية إذا و فقط
إذا كان : $2b = a + c$ ، الوسط الحسابي للعددين a و c

✠ تعريف متتالية هندسية :

♠ نقول أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان
من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1} = V_n \times q$ أو $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = q$

✠ عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

♠ (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_p و أساسها r عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (V_n)
هو: $V_n = V_p \times q^{n-p}$

✠ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

♠ لتكن (V_n) متتالية هندسية ، لحساب المجموع : $S = V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + ... + V_n$
نطبق القانون : $S = U_p \times (\dfrac{1-q^{n+p-1}}{1-q})$. حيث n دليل الحد الأخير و p دليل الحد الأول .

✠ الوسط الهندسي :

♠ تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا و فقط
إذا كان : $b^2 = a \times c$ ، يسمى العدد b^2 الوسط الهندسي للعددين a و c

✠ الرتابة و التقارب :

♠ إذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة (متزايدة تماما) و محدودة من الأعلى فإن المتتالية (U_n) متقاربة .
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة (متناقصة تماما) و محدودة من الأسفل فإن المتتالية (U_n) متقاربة .

✠ نهاية متتالية عددية :

♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بحدها العام فإن نهايتها هي نهاية دالتها المرفقة .
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية فإن نهايتها هي المعادلة $f(l) = l$ بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$
♠ إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية فإن نهايتها هي فاصلة تقاطع المنحنى (C_f)
الممثل للدالة f مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

✠ المتتاليتان المتجاورتان :

♠ (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان معناه إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة
و نهاية الفرق بينهما يؤول إلى الصفر أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

✠ التمثيل البياني لمتتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$:

[1] ♦ رسم كلا من (C_f) بيان الدالة f المرفقة بالمتتالية (U_n) و $(\triangle) : y = x$ منصف الربع الأول .
[2] ♦ نحدد النقطة $A(u_0;0)$ على حامل محور الفواصل ، ثم نبدأ بإسقاط النقطة A_0 وفق (oy) على (C_f)
فنتحصل على النقطة $M_0(u_0;u_1)$
[3] ♦ نسقط النقطة M_0 المحصل عليها على المستقيم $(\triangle)$ وفق (ox) فنتحصل على النقطة $N_1(u_1;u_1)$
[4] ♦ نسقط النقطة N_1 المحصل عليها على (xx') وفق (oy) فنتحصل على النقطة $A_1(u_1;0)$
[5] ♦ نكرر نفس الإنشاء مع A_1 فنحصل $M_1(u_1;u_2)$ و $N_2(u_2;u_2)$ و $A_2(u_2;0)$
[6] ♦ نكرر نفس الإنشاء مع A_2 فنحصل $M_2(u_2;u_3)$ و $N_3(u_3;u_3)$ و $A_3(u_3;0)$
[7] ♦ نحصل على النقط $A_n(u_n;0)$ على حامل محور الفواصل وهي تمثل حدود المتتالية (U_n) على حامل محور الفواصل
[8] ♦ نحصل على النقط $M_n(u_{n+1};u_n)$ على المنحنى (C_f) وهي عبارة عن تمثيل المتتالية (U_n)

✠ نهاية متتالية هندسية :

♠ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.
♠ إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 1$.
♠ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$.
♠ إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ غير موجودة .

✓ التمرين 01 ◄

♠ لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_n = 4n - 3$

[1] ♦ أحسب U_0 ، U_1 ، U_2 .

[2] ♦ بيّن أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r.

[3] ♦ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

[4] ♦ تحقق أن العدد 2021 حد من حدود المتتالية (U_n) ، ما رتبته ؟

[5] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{506}$

✓ التمرين 02 ◄

♠ (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين : $U_{10} = 31$ و $U_{15} = 46$

[1] ♦ عيّن أساسها و حدها الأول U_0 .

[2] ♦ أكتب (U_n) بدلالة n.

[3] ♦ بيّن أن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (U_n) ، ما رتبته ؟

[4] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2009}$

✓ التمرين 03 ◄

♠ (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها 5 حيث : $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 34$

[1] ♦ أحسب U_0 .

[2] ♦ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 5n + 1$

[3] ♦ عيّن العدد الطبيعي n حيث $U_{n+1} + U_n - 8n = 4033$

[4] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2013}$

[5] ♦ لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $V_n = 2U_n + 1$

أ) ♠ أدرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) .

ب) ♠ أحسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{2013}$

✓ التمرين 04 ◄

♠ لتكن (U_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 3 حدها الأول U_0 وتحقّق : $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 10$

[1] ♦ أحسب U_0 .

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n.

[3] ♦ أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{49}$

[4] ♦ لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $V_n = 2U_n + 1$

♦ أحسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{49}$

✓ التمرين 05 ◄

♠ (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $U_1 = 2$ وبالعلاقة : $U_2 - 2U_5 = 19$

[1] ♦ أحسب الأساس r للمتتالية (U_n) .

[2] ♦ أحسب الحد العاشر

[3] ♦ أكتب (U_n) بدلالة n.

[4] ♦ بيّن أن العدد (-2008) حد من حدود المتتالية (U_n) ، محددا رتبته

[5] ♦ أحسب المجموع : $S = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_{671}$

✓ التمرين 06 ◄

♠ (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_1 وأساسها r حيث : $U_2 = \dfrac{1}{2}$ و $U_1 - U_3 = 5$

[1] ♦ بيّن أن $U_1 + U_3 = 1$ ، ثم عيّن الحد الأول U_1 .

[2] ♦ استنتج أن : $r = -\frac{5}{2}$ ، ثم أكتب (U_n) بدلالة n.

[3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ثم عين قيمة العدد n التي تكون من أجلها $S_n = \frac{657}{2}$

✓ **التمرين 07** ◄

♠ نعتبر المتتالية الحسابية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 وأساسها r

[1] ♦ أحسب الحد U_4 ، علما أن : $U_3 + U_5 = 20$.

[2] ♦ أحسب الحد U_5 ، علما أن : $2U_4 - U_5 = 7$.

[3] ♦ استنتج قيمة r وأحسب U_0 .

[4] ♦ تحقق أن من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 3n - 2$

[5] ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

[6] ♦ جد قيمة العدد الطبيعي n حيث $S_n = 33$

✓ **التمرين 08** ◄

♠ (U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 وأساسها q حيث : $U_1 = 6$ و $U_4 = 48$

[1] ♦ أحسب الأساس و الحد الأول للمتتالية (U_n) .

[2] ♦ استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هي : $U_n = 3 \times 2^n$.

[3] ♦ علما أن $2^8 = 256$ ، بين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (U_n) .

[4] ♦ أحسب المجموع S حيث : $S = U_0 + U_1 + ... + U_7$

✓ **التمرين 09** ◄

♠ (U_n) متتالية عددية معرفة على بحدها الأول $U_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = 2U_n + 1$

[1] ♦ أحسب U_2 ، U_3 ، U_4 .

♠ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = U_n + 1$

[1] ♦ أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_1 .

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) بدلالة n ثم استنتج (U_n) بدلالة n

[3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ ثم عيّن قيمة n علما أن $S_n = 1016$

[4] ♦ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

✓ **التمرين 10** ◄ $\mathbb{BAC}$2009 علوم تجريبية ◄

♠ (U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول U_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$

[1] ♦ أحسب U_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول U_1.

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n.

[3] ♦ أحسب S_n حيث : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$، ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$

✓ **التمرين 11** ◄

♠ (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = \alpha \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{8}{9} \quad ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

[1] ♦ عين قيمة α حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة .

[2] ♦ برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (U_n) ثابتة .

[3] ♦ في كل ما يلي : $\alpha = 2$ ونعرف المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = U_n + \frac{8}{3}$

أ) ♠ أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الاول V_0

ب) ♠ أكتب عبارة الحد العام (V_n) بدلالة n ، وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

✓ التمرين 12 ► BAC2014 علوم تجريبية ◄

♠ لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{4}{3}$

و (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = U_n + 4$

[1] ♦ بيّن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

[2] ♦ أكتب كلا من (V_n) و (U_n) بدلالة n

[3] ♦ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) على $\mathbb{N}$.

[4] ♦ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

♠ لتكن (W_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $W_n = 5(\frac{1}{V_n + 5} - 1)$

[1] ♦ بيّن أن المتتالية (W_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

[2] ♦ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - W_n)$

✓ التمرين 13 ◄

♠ لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

[1] ♦ أحسب الحدود U_1 ، U_2 ، U_3 ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير الممتالية (U_n) .

[2] ♦ أ) ♠ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \geq 3$

ب) ♠ بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة ، ثم استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة .

[3] ♦ ♠ نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

أ) ♠ عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) ♠ أكتب عبارة (V_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n)

✓ التمرين 14 ► BAC2014 علوم تجريبية ◄

♠ α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \alpha U_n + 1$

♠ (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

[1] ♦ أ) ♠ بيّن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب) ♠ أكتب بدلالة n و α عبارة (V_n) ، ثم استنتج بدلالة n و α عبارة (U_n)

جـ) ♠ عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون من أجلها المتتالية (U_n) متقاربة

[2] ♦ نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

♦ أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ و $T_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

✓ التمرين 15 ◄

♠ لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n} \end{cases}$

[1] ♦ أحسب الحدود U_2 ، U_3 .

[2] ♦ أثبت بالتراجع أن : $U_n > \dfrac{1}{e}$

[3] ♦ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

[4] ♦ ♠ نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ كما يلي : $V_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(U_n)$

أ) ♠ بيّن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) ♠ عبر عن (V_n) بدلالة n ، ثم استنتج أن $U_n = e^{6(\frac{1}{2})^n - 1}$

ج) ♠ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

[5] ♦ أحسب الجداء : $S_n = U_0 \times U_1 \times ..... \times U_n$

✓ التمرين 16 ► $\mathbb{BAC}$2015 علوم تجريبية ◄

♠ (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1$

[1] ♦ أحسب U_1 ، U_2 ، U_3 .

[2] ♦ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0 + 1$

[3] ♦ بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علل.

[4] ♦ ♠ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 3(1 + U_n)$.

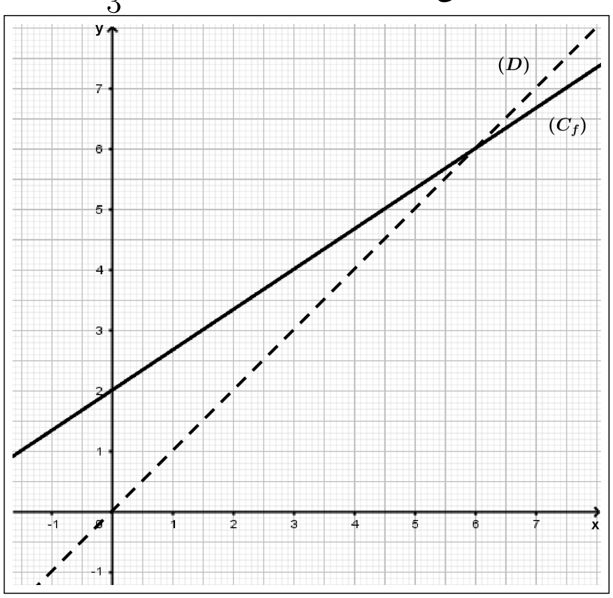
أ) ♠ بيّن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) ♠ أكتب (V_n) و (U_n) بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

ج) ♠ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln V_0 + \ln V_1 + \ln V_2 + ... + \ln V_n = (n+1)(-n + 2 + \ln 3)$

✓ التمرين 17 ◄

♠ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين (D) و (C_f) معادلتهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \dfrac{2}{3}x + 2$



[1] ♦ لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = \dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 2$

أ) ♠ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 بدون حسابها مبررا خطوط الرسم

ب) ♠ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[2] ♦ أ) ♠ برهن بالتراجع أن أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 6$

ب) ♠ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

[3] ♦ نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = U_n - 6$

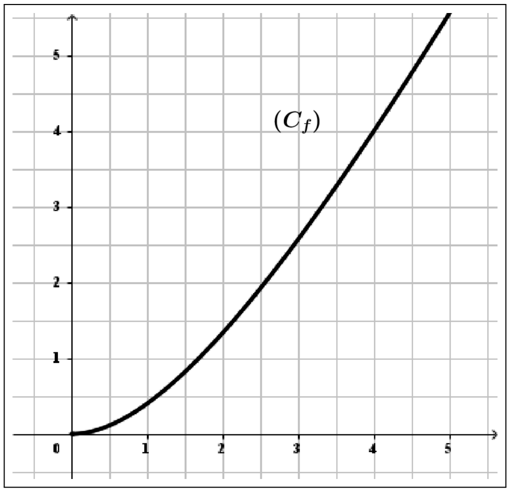
أ) ♠ برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) ♠ عبر عن (V_n) بدلالة n و استنتج (U_n) بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

ج) ♠ أحسب المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$ واستنتج المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$

✓ التمرين 18 ◄ $\mathbb{B}$AC2014 رياضيات ◄

♠ الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. كما هو مبين في الشكل أدناه .



[1] ♦ بيّن أن الدالة f متزايدة تماما .

[2] ♦ (U_n) المتتالية العددية المعرفةبـ : $U_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$. $(\triangle)$ المستقيم الذي معادلته $y=x$

أ) ♠ باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم $(\triangle)$ مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 دون حسابها .

ب) ♠ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[3] ♦ أ) ♠ برهن بالتراجع أن أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq U_n\leq 3$

ب) ♠ بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة .

جـ) ♠ استنتج أن (U_n) متقاربة .

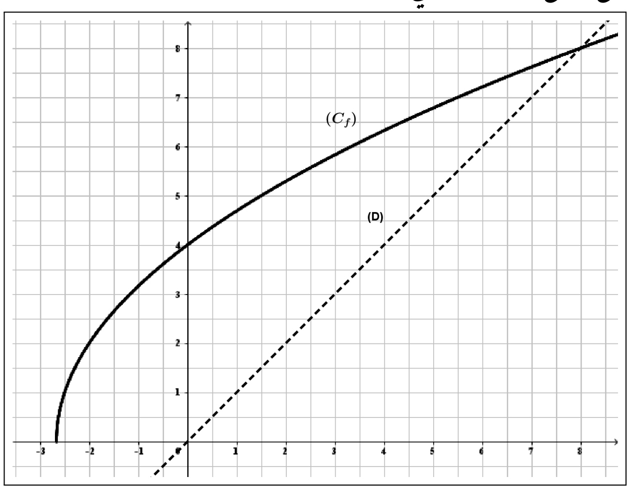
[4] ♦ أ) ♠ ادرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq U_{n+1}\leq \dfrac{6}{7}U_n$

ب) ♠ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq U_n\leq 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

جـ) ♠ أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

✓ التمرين 19 ◄ $\mathbb{B}$AC2015 تقني رياضي ◄

♠ نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\sqrt{6U_n+16}$



[1] ♦ h الدالة المعرفة على المجال $[-\dfrac{8}{3};+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و (C_f) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ) ♠ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 بدون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء

ب) ♠ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

[2] ♦ أ) ♠ برهن بالتراجع أنه أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq U_n<8$

ب) ♠ بيّن أن : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{(8-U_n)(U_n+2)}{\sqrt{6U_n+16}+U_n}$

جـ) ♠ استنتج اتجاه تغير (U_n) .

[3] ♦ أ) ♠ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(8-U_n)$

ب) ♠ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-U_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

✓ التمرين 20 ◄

♠ (U_n) متتالية حسابية متناقصة معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 و أساسها r حيث : $\begin{cases}U_1+U_2+U_3=24\\ U_1^2+U_2^2+U_3^2=210\end{cases}$

[1] ♦ أحسب U_2 و الأساس r لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول U_0.

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n ، ثم أحسب U_{2021}.

[3] ♦ أحسب المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

♠ نعتبر (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = e^{14-3n}$ (حيث e أساس اللوغاريتم النيبري)

[1] ♦ بيّن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول .

[2] ♦ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ، ماذا تستنتج ؟

[3] ♦ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

[4] ♦ أحسب الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times ..... \times V_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

✓ التمرين 21 ◄

♠ (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\begin{cases} \ln U_4 - \ln U_2 = 2 \\ \ln U_1 + \ln U_6 = 9 \end{cases}$

[1] ♦ عيّن أساسها q و حدها الأول U_1.

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

[3] ♦ أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

♠ (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$

[1] ♦ بيّن أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r و حدها الأول .

[2] ♦ أحسب بدلالة n المجموع : $T_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

✓ التمرين 22 ◄

♠ (U_n) متتالية عددية معرفة على $n \in \mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{4} \\ U_{n+1} = (U_n)^2 + \dfrac{U_n}{2} \end{cases}$

[1] ♦ أحسب الحدود U_1 ، U_2 .

[2] ♦ أثبت بالتراجع أن : $0 < U_n \leq \dfrac{1}{4}$

[3] ♦ بيّن أن (U_n) متناقصة تماما .

[4] ♦ هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ علل ؟

[5] ♦ أ) ♠ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} U_n$

ب) ♠ استنتج أن $U_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

✓ التمرين 23 ► $\mathbb{BAC}$2018 تقني رياضي ◄

♠ لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام : $U_n = 2(3)^n$

و (V_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $V_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = 5V_n + U_n$

♠ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $W_n = \dfrac{V_n}{U_n} + \dfrac{1}{2}$.

[1] ♦ أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ يطلب تعيين وحدها الأول .

[2] ♦ أكتب عبارة الحد العام (W_n) بدلالة n ، ثم استنتج أن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = 5^{n+1} - 3^n$

سلسلة المتفوق في الرياضيات

Bac 2022

تمارين ومسائل في المتتاليات

الجزء الثاني

BY LALAOUNA ALI MOUNIR

تمرين 1

(u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $u_0=5$ ، $u_1=31$ ، $v_0=-1$ و $v_1=-11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_{n+2}=12u_{n+1}-35u_n \\ v_{n+2}=12v_{n+1}-35v_n \end{cases}$$

ولتكن المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $x_n=u_n+v_n$ و $y_n=u_n-v_n$

1/ أحسب x_0 و x_1 ثم برهن أن المتتالية (x_n) هندسية أساسها 5

2/ برهن أن المتتالية (y_n) هندسية بنفس طريقة السؤال 1/

3/ أحسب x_n و y_n بدلالة n ثم عبرعن u_n و v_n بدلالة n .

تمرين 2

❖ المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

- أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج الحد الأول u_0

2/ أ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم أستنتج أنها متقاربة .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\le u_n\le\frac{1}{(n+1)}$.........(1) ثم أستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3/ من أجل $n\ge 3$ نضع $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

أ) تحقق أن من أجل $n\ge 3$: $u_n+u_{n-2}=I_n$

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة على I_n بين أن من أجل $n\ge 3$: $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$

ت) أستنتج أن من أجل $n\ge 3$: $(2n-1)u_n\le\sqrt{2}$............(2)

ج) بوضع $v_n=nu_n$ وباستعمال المتباينتين (1) و (2) بين أن (v_n) متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

تمرين 3

I) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1. أ – احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$.

ب–ادرس اتجاه تغير الدالة g

جـ–بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4\le\alpha<\ln 6$.

د –استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

---

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n < \alpha$.

ب - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ-بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. ا/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x, $f(x) = x + \ln(1+2e^{-2x})$
ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)
2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$
ب/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها
4. ارسم (D) و (D') و (C)
5. نضع : $I=\int_2^3 [f(x) - x]\, dx$

-1 فسر هندسيا العدد I

-2 بين أنه من اجل كل x من $[0,+\infty[$, $\ln(1+x) \le x$

-3 أستنتج أن $0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x} dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

تمرين 5

I) f دالة معرفة على المجال $]2,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2,+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = \dfrac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n < 3$.
2. استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n^2 < \dfrac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.
3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
4. تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n - 2)$.
5. أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n - 2 \le \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 6

(u_n)متتالية عددية معرفة بـ : $u_1 = 3$
و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \ln(2e^{u_n})$
1- أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها
2- أحسب u_n بدلالة n
3- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_1 + u_2 + \cdots . + u_n = \left(\frac{ln2}{2}\right)n^2 + \left(3 - \frac{ln2}{2}\right)n$$

4- (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = e^{u_n}$
أ. أحسب $v_1 ; v_2 ; v_3$ ثم عين v_n بدلالة n
ب. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
ج. أحسب الجداء $\Pi = v_1 v_2 \ldots \ldots . v_n$

تمرين 7

نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[0,2]$ بالعبارة : $\varphi(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

1) a) ادرس تغيرات الدالة φ على المجال $[0,2]$
b) برهن انه إذا كان $x \in [0,2]$ فإن $\varphi(x) \in \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بالعبارة : $u_n = \displaystyle\int_0^2 \varphi(x) e^{\frac{x}{n}} dx$
a) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$
b) برهن انه اذا كانت (u_n) تقبل نهاية l فإن $3 \leq l \leq \frac{7}{2}$ (نذكر أن : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$) .

3) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ فإن : $\varphi(x) = 2 - \dfrac{1}{x+2}$
- استنتج ان التكامل : $I = \displaystyle\int_0^2 \varphi(x)dx$

4) a) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ فإن : $1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$
b) استنتج أن : $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$
c) عين النهاية l للمتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

تمرين 8

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$
1) احسب u_1 ، u_2 و u_3
2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^n - 1$
(v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$
3) احسب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n
حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$
1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و v_n
2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3
ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي نحقق $v_n \equiv 0[3]$
ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما
3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

تمرين 9

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على المعرفة بـ $\mathbb{N}^*$: $u_1 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1. أ) اثبت بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n \prec 3$.
ب)استنتج ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
ج) بين ان المتتالية (u_n) متقاربة مع تحديد نهايتها .
2. نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = n(3-u_n)$
أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالة العدد الطبيعي غير معدوم n.
ج) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع و الجداء التاليين :
$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ، $P_n = v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n$.

تمرين 10

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = 0$، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$

أ ــ برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0 \le u_n < u_{n+1} < 2$ ، ثم استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .
(يمكنك استعمال اتجاه تغير الدالة المرفقة للمتتالية (u_n))

ب ــ برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $2 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(2 - u_n)$ واستنتج أن من أجل كلّ عدد طبيعي n،
$0 < 2 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، و احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2. (v_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

أ ــ برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، يطلب تحديد حدها الأول.

ب ــ اكتب كلاّ من v_n و u_n بدلالة n، ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 11

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$.
2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN ثم أستنتج أنها متقاربة معيناً نهايتها .
3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n^2-1$
أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
ب -أكتب بدلالة n كلا من u_n ; v_n ثم أحسب $\lim u_n$.
ج-أحسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية $S_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2$ و
$T_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\ldots.+2^nv_n$ و $L_n=\ln(v_0)+\ln(v_1)+\ln(v_2)+\ldots.+\ln(v_n)$

تمرين 12

لتكن f الدالــة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{5x}{2x+3}$

1-بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ثــم شكل جدول تغيراتها

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ : $U_0=2$ و من أجل كل عــدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{5U_n}{2U_n+3}$

2 -ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عــدد طبيعي n : $U_n\succ 1$

ب)- ادرس اتجــاه تغير المتتالية (U_n) ثــم استنتج انها متقاربـــة

نعرف من اجل كل عـــدد طبيعي n المتتالية (V_n) كمــا يلي : $V_n=1-\frac{1}{u_n}$

3-ا)- بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حـــدها الاول

ب)- عبر عن V_n بدلالة n ثــم استنتج عبارة U_n بدلالــة n

نضع من اجل كل عـــدد طبيعي n : $S_n=V_0^2+V_1^2+\ldots..+V_n^2$

جـ) احسب بدلالة n قيمة المجموع S_n ثــم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

تمرين 13

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;10]$ بـ: $g(x)=3-x+ln(x)$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[1;10]$، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α في المجال $[1;10]$، ثم تحقق أن $4{,}50<\alpha<4{,}51$.

جـ) استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $[1;10]$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـ: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

حيث f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=3+lnx$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

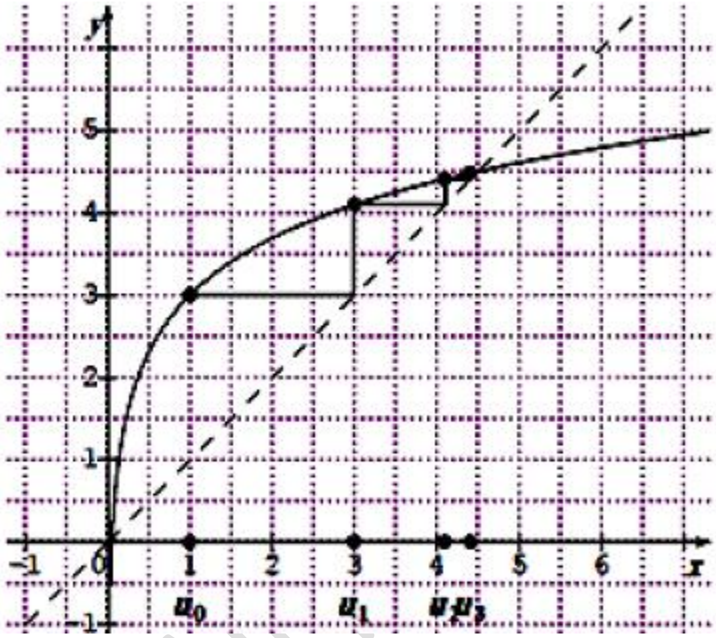
1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)، لاحظ أن المنحنى (C_f) هوصورة منحنى الدالة ln بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;3)$.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $1 \leq u_n < \alpha$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل.

د) استنتج بالضبط نهاية المتتالية (u_n)



تمرين 14

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n - 2} + 2 \end{cases}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (U_n) و (Δ) المنصف الأول ذي المعادلة: $y = x$.

1. أ.مثل الحدود U_0، U_1، U_2، U_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.(على الوثيقة المرفقة)

ب.أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (U_n) .

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3 \leq U_n \leq 11$.

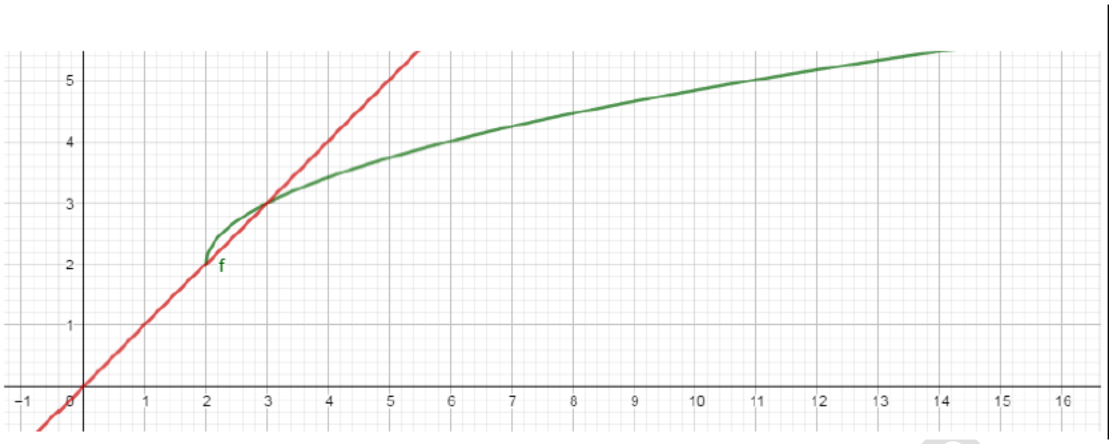
3. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 2}\left(1 - \sqrt{U_n - 2}\right)$

4. أ.بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب.إستنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة، و عين نهايتها.

5. أ.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

ب.إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq U_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$



تمرين 15

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

1) احسب u_2، u_3 و u_4.

2) أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n > 0$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = \frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x) - x\ln 2$.

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين 16

1. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = e + \sqrt{U_n - e}$

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $e < U_n < e + 1$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - e)(e + 1 - U_n)}{\sqrt{U_n - e} + U_n - e}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ت. استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها.

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $_n = eln(\ U_n - e)$

أ. بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. احسب V_0.

ب. عبر عن $_n$ بدلالة n ثم بين أن $U_n = e(1 + e^{\ln(3-e)\times(\frac{1}{2})^{n}-1})$ واحسب نهاية (U_n) مرة ثانية.

3. نضع: $S_n = ln(3-e) + ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots ln(3-e)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $P_n = \left(\frac{U_0}{e}-1\right)\times\left(\frac{U_1}{e}-1\right)\times\left(\frac{U_2}{e}-1\right)\times\ldots\times\left(\frac{U_n}{e}-1\right)$

احسب n ثم بين أن $P_n = e^{S_n-n-1}$

تمرين 17

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1) أحسب u_1 و v_1.

2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n.

3) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

بيّن أنّ: $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

تمرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1+\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1+\sqrt[3]{u_n-1}$

1) باستعمال الاستدلال بالتراجع بين ان: من اجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<2$

2) أ- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\left(\sqrt[3]{u_n-1}\right)\left(1-\sqrt[3]{u_n-1}\right)\left(1+\sqrt[3]{u_n-1}\right)$

ب- بين ان المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج انها متقاربة.

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول.

ب-عين عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n. ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين 19

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0=\frac{11}{4}$ و $u_{n+1}=3u_n-4$، (v_n) متتالية معرفة على N بـ: $v_n=4u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي

1) أحسب الحدود u_1,u_2.

2) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N.

3) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.

4) بوضع $\alpha=-8$:

أ) أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ب) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟ علّل.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+\frac{u_1}{4}+\frac{u_2}{4^2}+\cdots+\frac{u_n}{4^n}$.

أحسب المجموع S_n، ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n=\frac{17}{3}$.

تمرين 20

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}$

1) أحسب u_2 و u_3 .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $u_n\in\left[\frac{1}{3};1\right]$

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، أحسب نهايتها .

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_n=v_n-\alpha$.

أ) أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) نضع $\alpha=\frac{-1}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n عبارة u_n .

➢ أحسب بدلالة n، المجموع: $S_n=u_1+u_2+......+u_n$.

➢ أحسب بدلالة n، الجداء: $P_n=v_1\times v_2\times......\times v_n$.

تمرين 21

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;2]$.

2) أثبت أنه إذا كان $x\in[1;2]$ فإن $f(x)\in[1;2]$.

3) مثل (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ على المجال $[0\ ;\ 2]$.

II . نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1) أ)أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 دون حسابها.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n\leq 2$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ت) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها.

3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_{n+1}-1<\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

ت) نضع : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$

➢ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n<S_n<n+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ ، ثم أحسب كلا من $\lim_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$