النهايات

✠ نهايات الدوال المرجعية

★ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$	★ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	★ $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$	★ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty.$
★ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	★ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$	★ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$	★ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
	★ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \frac{1}{x} = -\infty$	★ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1}{x} = +\infty.$	★ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

✠ العمليات على النهايات : f و g دالتان a, عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ نقبل بدون برهان المبرهنات التالية :

[1] ♦ نهاية مجموع دالتين :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

[2] ♦ نهاية جداء دالتين :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

[2] ♦ نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

✠ نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ او عند $-\infty$:

★ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدهاالأعلى درجة.
★ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

✠ المستقيمات المقاربة : a و b عددان حقيقيان f دالة معرفة على مجال I و C_f تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\end{cases}$ المستقيم ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\end{cases}$ المستقيم ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0\end{cases}$ المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

✠ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب المائل $(\triangle)$:

♠ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$ و نميز الحالات التالية :
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم $(\triangle)$
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم $(\triangle)$
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\triangle)$ في النقطة $A(x_0;f(x_0))$

✠ ملاحظة: اذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0$ فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربين عند المالانهاية .

✠ النهايات والحصرأو بالمقارنة: h,g,f دوال و l عدد حقيقي

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ واذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ واذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\geqslant g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ واذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\leqslant g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

✠ نهاية دالة مركبة:

♠ a,b و c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ و $-\infty$. f,g و h دوال حيث $h=g\circ f$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ واذا كانت $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}h(x)=c$

✠ تذكير حول بعض المفاهيم:

[1]♠ الدالة f زوجية معناه: $f(-x)=f(x)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
[2]♠ الدالة f فردية معناه: $f(-x)=-f(x)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم
[3]♠ $w(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه :
♦ من اجل كل x من D_f فإن : $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$
[4]♠ $x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) معناه :
♦ من اجل كل x من D_f فإن : $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)=f(x)$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

✠ سلسلة التمارين ✠

✓ التمرين 01 ◄

♠ عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$. في كل حالة من الحالات التالية :

♦ [1] $f(x)=2x^3+5x+7$
♦[2] $f(x)=-5x^3+x^2-3$
♦ [3] $f(x)=(-x^3+x-1)(1-x)$
♦[4] $f(x)=(x^2-1)^3(2-x^3)^2$
♦ [5] $f(x)=-x^4+x^2-6$
♦[6] $f(x)=(-2x^2+3)(1-x^2)$

✓ التمرين 02 ◄

إزالة حالات عدم التعيين

♠ باستعمال الإختزال احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-4x-6}{x^2-x-2}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$

♠ باستعمال المرافق احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$ ♦ [4] $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2-1}$

♠ باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$

♠ باستعمال نهاية مركب دالتين احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x-1}}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to+\infty} sin(\frac{\pi x+1}{2x+3})$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty} cos(\frac{\pi x+1}{x-2})$

♠ باستعمال الحصر و المقارنة احسب النهايات التالية :

✓ نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ بـ : $f(x)=\frac{sin\ x}{x-1}$

♦ [1] بين أنه إذا كان $x>1$ فإن : $-\frac{1}{x-1}\leq\frac{sin\ x}{x-1}\leq\frac{1}{x-1}$

♦ [2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

✓ التمرين 03 ◄

♠ عين النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

♦ [2] $\lim\limits_{|x|\to+\infty} 1+\frac{cos\ x}{x^2}$

♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2-\sqrt{x^2+x}$

♦ [5] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

♦ [6] $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$

♦ [7] $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^3+3x+1}{(x-1)^2}$

♦ [8] $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\frac{\sqrt{x^2+16}}{x-4}$

♦ [9] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{3x^2-2x+3}$

♦ [10] $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}+\frac{sin\ x}{x}$

♦ [11] $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^3-x$

♦ [12] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$

♦ [13] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sin\ x}{x}$

♦ [14] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$

♦ [15] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$

✓ التمرين 04 ◄

♠ الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

♦ [1] عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

♦ [2] احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها .

♦ [3] بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له .

♦ [4] بين أن المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

♦ [5] ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$.

✓ التمرين 05 ◄

♠ لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

♦ [1] أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

♦ [2] عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

♦ [3] احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

♦ [4] ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$ الذي معادلته $y=2x-1$

✓ التمرين 06 ◄

♠ الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+6x-5}{(x-1)^2}$.

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

♦ [1] احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها .

♦ [2] بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له .

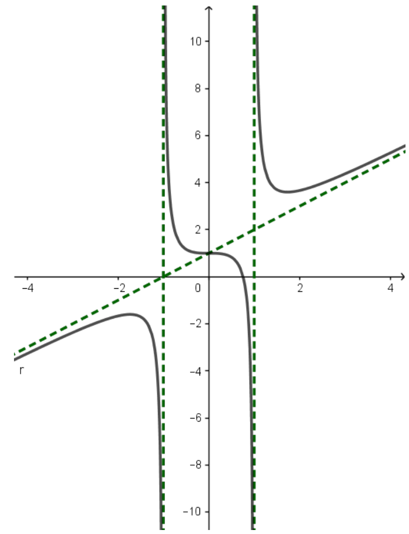
♦ [3] عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c
d بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

♦ [4] بين أن المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

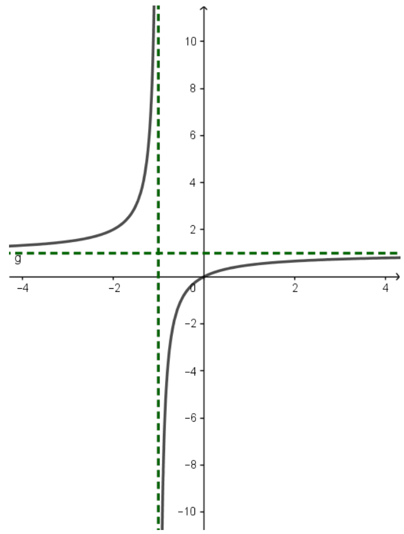
♦ [5] ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$.

✓ التمرين 07 ◄

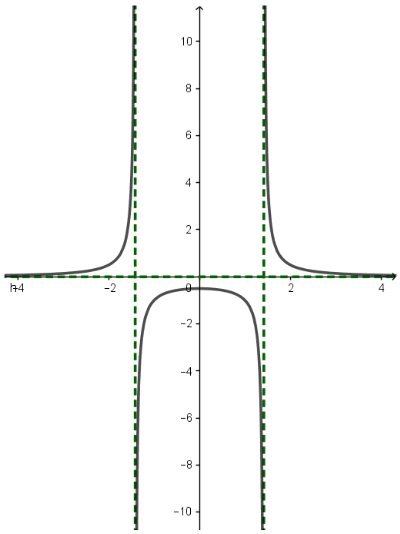
المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و (C) التمثيل البياني للدالة f.
بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :



االحالة 1



الحالة 2



الحالة 3

✓ التمرين 08 ◄

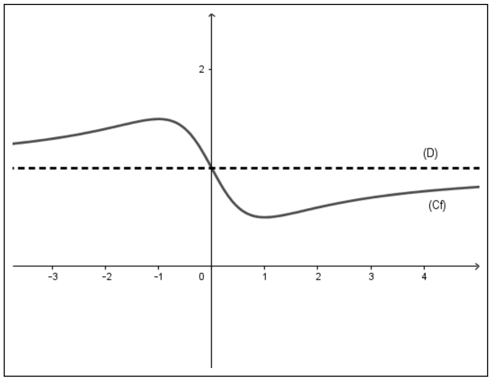
♠ f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

♠ تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .
[1] ♦ احسب $f'(x)$ بدلالة a و c .
[2] ♦ اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :
• عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c .
⋆ احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$ ، ثم فسر بيانيا النتيجتين.

♠ نأخذ فيما يلي : $a=1$ ، $b=1$ و $c=1$. و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
[1] ♦ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).
[2] ♦ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

✓ التمرين 09 ◄



♠ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
(D) المستقيم ذو المعادلة $y=1$

[1] ♦ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f

[2] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

[3] ♦ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

[4] ♦ أثبت أن النقطة $w(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

✓ التمرين 10 ◄

♠ f و g دالتين معرفتين على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانين للدالتين f و g على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، وجدول تغيراتهما معطى كما يلي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-4

[1] ♦ عيّن معادلات المستقيمات المقاربة لكل من (C_f) و (C_g) .

[2] ♦ عين المجال الذي تنتمي إليه نقاط تقاطع كل من (C_f) و (C_g) مع محور الفواصل .

[3] ♦ احسب نهايات الدالة $g\circ f$ على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

✓ التمرين 11 ◄

♠ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ، و جدول تغيراتها معطى كمايلي :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	1

[1] ♦ عيّن اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

[2] ♦ عيّن اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

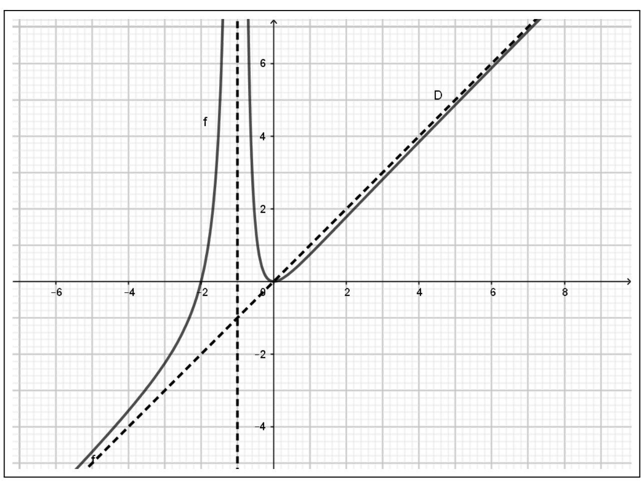
♠ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
كما يلي : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

[3] ♦ عيّن النهايات للدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

[4] ♦ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم إستنتج اشارة $g'(x)$

[5] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة g .

✓ التمرين 12 ◄



♠ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{x}{(x+1)^2}$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
(D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

[1] ♦ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f

[2] ♦ بقراءة بيانية عيّن اشارة $f'(x)$.

[3] ♦ بقراءة بيانية عيّن اشارة $f(x)$.

[4] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

[5] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

[6] ♦ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

تمارين للتعمق

✓ التمرين 01 ◂

♠ عين النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x^3-3x^2+9$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{2x+1}$

♦ [7] $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-2x\right)$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{16x^2+6x+1}-4x\right)$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

✓ التمرين 02 ◂

♠ أحسب النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3-x}-3}{x+1}$ ♦ [2] $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{-1+5x^3}$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-2x^3}-\sqrt{-x^3+x+1}\right)$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

♦ [7] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

✓ التمرين 03 ◂

♠ أحسب النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x.\tan x}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{\tan(7x)}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{7x}$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$

♦ [7] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

✓ التمرين 04 ◂

♠ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

♦ [1] اثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فأن :

$x^2\le x^2+x+1\le (x+1)^2$ و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

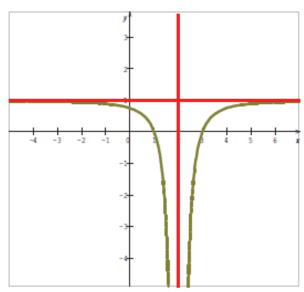
♦ [2] استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1-\frac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

♦ [3] أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

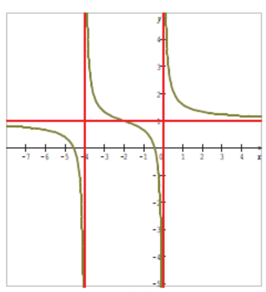
✓ التمرين 05 ◂

♠ شكل جدول تغيرات في كل حالة :

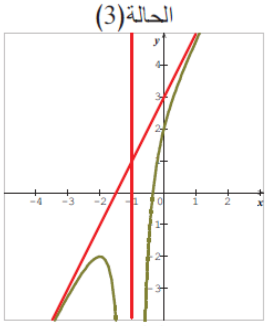
الحالة(1)



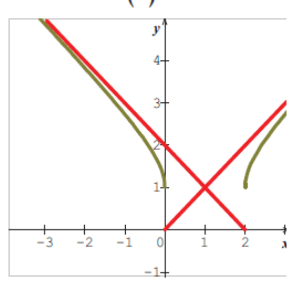
الحالة(2)



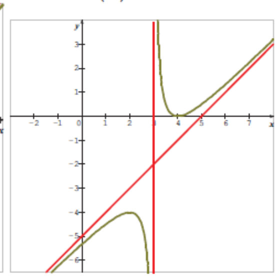
الحالة(3)



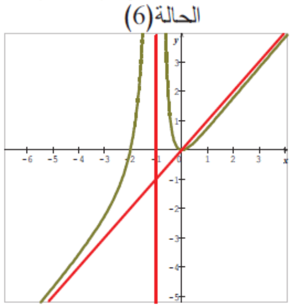
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



تمارين للتعمق

✓ التمرين 06 ◄

♠ f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ حيث :

$$|f(x)-3| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

[1] ♦ هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

✓ التمرين 07 ◄

[1] ♦ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

[2] ♦ استنتج النهايتين التاليتين :

أ) ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ب) ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

✓ التمرين 08 ◄

♠ باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

[1] ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+4(-1)^x}{x}$ [2] ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{\sqrt{x}(x-1)}$

✓ التمرين 09 ◄

[1] ♦ من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$

[2] ♦ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x$

✓ التمرين 10 ◄

[1] ♦ من أجل $x>1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$

[2] ♦ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x$

✓ التمرين 11 ◄

[1] ♦ من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$ و $x\sqrt{2}$

[2] ♦ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-x$

✓ التمرين 12 ◄

✓ نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

[1] ♦ بين انه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} < -2x$$

[2] ♦ استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $f(x) \leq -4x^2$

[3] ♦ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{}$

نستعمل طريقة التحليل :

وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{\alpha x+\beta}=|x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

تطبيق القاعدة التالية :

عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{}$

- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$
  - $\sqrt{a}\neq|\alpha|$ ← نضع x كعامل مشترك
  - $\sqrt{a}=|\alpha|$ ← نستعمل طريقة المرافق
- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$
  - $a\neq\alpha$ ← نستعمل طريقة المرافق
  - $a=\alpha$ ← نضع x كعامل مشترك
- $f(x)=\sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$ ← نضع x كعامل مشترك

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :

❶ نحلّل البسط والمقام.

❷ ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{}$

نستعمل طريقة المرافق :

❶ نضرب : $f(x)\times\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$

❷ ثم نختزل على : $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

❶ إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\ldots\ldots}{\alpha x+\beta}=\frac{1}{\alpha}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

❷ $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

مثال 01

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ تكافئ : $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ :

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{2}$

مثال 02

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}=|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+(2x-2)\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$ تكافئ

$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{-4x}=-2$

مثال 03

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}\neq|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$ تكافئ

$\lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+x-2$

تكافئ $\lim_{x\to-\infty} -x\left[\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty} -3x=+\infty$

مثال 04

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ $(+\infty-\infty\,,\ a=\alpha)$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$

مثال 05

$(+\infty-\infty\,,\ a\neq\alpha)$ $f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ تكافئ

$\lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{4-3/x^2}-x\sqrt{9-2/x^2}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty} -x[2-3]$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

مثال 06

$f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-3x+2$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty} x[\sqrt{2}-3]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

مثال 07

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\frac{1}{4}$

مثال 08

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}(x+1)$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=2$

مثال 09

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

لحساب $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ

$\lim_{x\to x_0} f(x)=g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

ومنه بوضع $g(x)=\sqrt{x+3}$ نجد $g(1)=2$ ومنه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $g'(1)=\frac{1}{4}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\frac{1}{4}$